Aufgabe Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n - 3^n}{3^n + n}$.

Aufgabe Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ so dass $|a_n| \leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^2} = 0.$$

Aufgabe Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine divergente Folge ist und $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ist eine Folge mit $b_n \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann ist $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ ebenfalls divergent.

Aufgabe Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{3^n} \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3n+1}{2n^2+1}$$

Aufgabe Bestimmen Sie diem Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die die folgende Potenzreihe konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 3^n) x^n.$$

Aufgabe Es sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge mit $|a_n| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$.

Aufgabe Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2)}{\mathrm{e}^x - 1 - x}$

Aufgabe Außer dem in der Vorlesung eingeführten Begriff der Stetigkeit gibt es noch weitere Möglichkeiten, Stetigkeit zu definieren. Zum Beispiel heißt eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ *Lipschitz-stetig,* falls gilt:

$$\exists\, L \in \mathbb{R}\ \forall\, x, y \in D : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Jede Lipschitz-stetige Funktion ist stetig im üblichen Sinn, aber nicht jede im üblichen Sinn stetige Funktion ist auch Lipschitz-stetig.

Zeigen Sie: Die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist Lipschitz-stetig.

(Hinweis: Eine mögliche Wahl für L ist $L = 2$.)

Aufgabe Sei $f\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\sin(x) + \cos(x)$. Berechnen Sie alle Maximal- und Minimalstellen von f.

Aufgabe Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^\pi x\sin(x)dx$.

Aufgabe Untersuchen Sie, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{x\,\mathrm{e}^y}{|x| + y^2}$$

im Punkt $(0,0)$ konvergiert.

Aufgabe Berechnen Sie für die Funktion f aus der vorherigen Aufgabe den Gradient im Punkt $(1,1)$.

Aufgabe Sei $D = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ und $f\colon D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$. Berechnen Sie das Volumenintegral $\displaystyle\int_D f(x,y)d(x,y)$.

Aufgabe Sei f wie in der vorherigen Aufgabe und

$$\gamma\colon [0, \tfrac{1}{2}\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\sin(t), \cos(t)).$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\displaystyle\int_\gamma f(x,y)\,ds$.

Aufgabe

1. Berechnen Sie die Länge der Kurve

   $$\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (19 + 2t + t^2, 3 - 4t - 2t^2, 1 + 4t + 2t^2).$$

2. Wie lautet die Kurve, die die gleichen Punkte wie γ aus (a) durchläuft, aber mit doppelter Geschwindigkeit?
3. Wie lautet die Kurve, die die gleichen Punkte wie γ aus (a) durchläuft, aber in umgekehrter Richtung?