Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2013**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2013/analysis/

Übungsblatt 11

Besprechung am **16.1.2014**

Aufgabe 1 Ein Körper wird vom Boden aus mit einer Geschwindigkeit $v_0 = 20$ m/s unter dem Winkel $\beta = 37\,^\circ$ schräg nach oben geworfen. Sei t_0 der Zeitpunkt des Aufpralls am Boden, dann ist die Flugbahn des Körpers durch folgende Kurve gegeben:

$$f\colon [0,t_0] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} v_0\, t \cos\beta \\ v_0\, t \sin\beta - g\frac{t^2}{2} \end{pmatrix},$$

wobei $g = 9{,}81$ m/s^2 die Fallbeschleunigung ist. Berechnen Sie den Zeitpunkt des Aufpralls t_0, die Wurfweite und die maximale Flughöhe. Berechnen Sie weiters den Fluggeschwindigkeitsvektor $f'(t)$ und den Beschleunigungsvektor $f''(t)$ des Körpers zum Zeitpunkt t.

Aufgabe 2 Zeigen Sie, dass die durch die stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t = 0 \\ t\cos\frac{\pi}{t}, & t \in (0,1], \end{cases}$$

definierte Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, f(t))$ nicht messbar ist.

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Länge und die maximale Durchlaufgeschwindigkeit der folgenden Kurven.

$$f_1\colon [0,T] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ t \end{pmatrix}, \quad f_2\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 Eine Kurve $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ der Form

$$\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos(\phi) \\ f(\phi)\sin(\phi) \end{pmatrix},$$

wobei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist (d.h. die Ableitung ist stetig), bezeichnet man auch als Kurve in Polarkoordinaten. Zeigen Sie, dass für eine solche Kurve γ gilt:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f^2(\phi) + (f'(\phi))^2}\,\mathrm{d}\phi.$$

Berechnen Sie weiters die Länge der als Herzkurve bezeichneten Funktion, die durch $a = 0$, $b = 2\pi$ und $f(\phi) := 1 + \cos(\phi)$ gegeben ist. *Hinweis:* $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$.

Aufgabe 5 Implementieren Sie ein Programm in Sage, das näherungsweise die Länge einer gegebenen Kurve $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ berechnet. Testen Sie Ihr Programm an den Kurven aus Aufgabe 3 sowie an der Kurve $g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$, um eine Näherung an π zu berechnen.