Übungsblatt 12

Besprechung am **23.01.2014**

Aufgabe 1 Sei $D = [-1,1]^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie für die folgenden zweidimensionalen Vektorfelder jeweils die Divergenz und erstellen Sie eine Skizze des Feldes. Bei welchen handelt es sich um Gradientenfelder?

a) $f\colon D \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (y^2, x^2)$

b) $g\colon D \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (\mathrm{e}^x, 0)$

Berechnen Sie außerdem das Kurvenintegral von f entlang des Randes von D und das Kurvenintegral von g entlang des Einheitskreises.

Aufgabe 2 Berechnen Sie Divergenz und Rotation für die folgenden dreidimensionalen Vektorfelder. Welche der Felder sind quellen-, welche wirbelfrei?

a) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \big(2z(x+y), 2z(x+y), (x+y)^2\big)$

b) $f_2\colon (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \big(\log(x\mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^z}), x^2+y^2-y/x, \log(x) - 2yz + \mathrm{e}^z\big)$

c) $f_3\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \big(\cos(x+y)+\cos(z), \cos(x+y)+z, y - x\sin(z)\big)$

Aufgabe 3 Sei $D = (0,\infty)^2 \times \mathbb{R}$ und

$$f\colon D \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto \Big(\frac{\alpha z}{x}, \frac{z}{y}, \log(xy)\Big)$$

ein Vektorfeld mit Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $\operatorname{rot}(f)$ und $\operatorname{div}(f)$.

b) Für welche Werte von α ist f ein Gradientenfeld?

c) Gegeben sei nun eine Kurve $\gamma\colon [-1,1] \to D, t \mapsto \big(\exp(t^2), 1, \sin(\pi t)\big)$. Berechnen Sie jeweils für $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ das Kurvenintegral von f entlang γ.

Aufgabe 4 Beweisen Sie Satz 39 aus dem Skriptum: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Vektorfelder $f, g\colon D \to \mathbb{R}^3$ koordinatenweise differenzierbar, die Gebirgsfunktion $h\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) $\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div}(f) + \beta \operatorname{div}(g)$

b) $\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot}(f) + \beta \operatorname{rot}(g)$

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(h)) = (0,0,0)^T$

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0$

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Programm in Sage, welches zu einem gegebenen zweidimensionalen Vektorfeld f einen Plot der Feldlinien erstellt. Eine Feldlinie kann man sich vorstellen als diejenige Wegkurve, entlang der sich ein Teilchen bewegt, welches immer der Richtung des Feldes folgt. Formaler ausgedrückt: die Tangente an eine Feldlinie in einem Punkt (x,y) stimmt mit der Richtung des Vektorfeldes $f(x,y)$ in diesem Punkt überein.
Hinweis: Im Unterschied zu `plot_slope_field` sollen durchgezogene Linien entstehen. Es ist ein bisschen Experimentierfreude gefragt, wie man das am besten erreicht, eine kanonische Lösung gibt es nicht. Der Plot muss am Ende auch nicht perfekt aussehen.