Übungsblatt 3

Besprechung am **24.10.2013**

Aufgabe 1 Untersuchen Sie, ob diese Folgen für $n > 0$ konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

$$\begin{array}{lllllllll} a_n & = & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}, & b_n & = & -\frac{n}{5} + \frac{5}{2n}, & c_n & = & \left(\frac{nk+k}{2n}\right)^m, \ k, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \\ d_n & = & (-1)^n(1+\frac{1}{n}), & e_n & = & \frac{(4n+1)(3n^2-2n+1)}{(5n-1)^3}, & f_n & = & \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}}. \end{array}$$

Aufgabe 2 Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Folgen konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

$$(x^n)_{n\geq 1}, \qquad \left(\left(-\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}, \qquad (n^k x^n)_{n\geq 1}, \ k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 3 Beweisen Sie Satz 5(2) aus der Vorlesung:
Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Zeigen Sie, dass

$$a_n \cdot b_n \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b.$$

Aufgabe 4 Ein Ford-Kreis ist ein Kreis mit Radius $\frac{1}{2q^2}$ und Mittelpunkt $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$, wobei $\frac{p}{q}$ ein Bruch mit teilerfremden, ganzen Zahlen p, q ist. Definieren Sie eine Funktion in Sage, welche zu gegebenem p und q einen Ford-Kreis generiert.
Gegeben sei die Folge:

$$\begin{array}{lllll} a_0 & = & \frac{p_0}{q_0} & = & \frac{1}{2} \\ a_n & = & \frac{p_n}{q_n} & = & \begin{cases} \frac{p_{n-1}+1}{q_{n-1}}, & \text{wenn } \frac{p_{n-1}+1}{q_{n-1}} \neq 1, \\ \frac{1}{\text{NextPrime}(q_{n-1})}, & \text{sonst.} \end{cases} \end{array}$$

Mit NextPrime(q) wird die kleinste Primzahl größer als q bezeichnet. Schreiben Sie ein Programm in Sage, welches die Ford-Kreise der (ersten n) Folgenglieder zeichnet.

Aufgabe 5 Konvergiert die Folge aus Aufgabe 4? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert. Definieren Sie eine Folge, welche die Durchmesser der oben verwendeten Ford-Kreise auflistet. Jeder Durchmesser soll nur einmal vorkommen. Konvergiert die von Ihnen definierte Folge? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.