Übungsblatt 6

Besprechung am **21.11.2013**

Aufgabe 1 Approximieren Sie sin(1) numerisch mit Hilfe eines Taylorpolynoms. Stellen Sie durch eine Abschätzung des Restgliedes sicher, dass der Fehler kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

Aufgabe 2 Bestimmen Sie eine Reihendarstellung für $f(x) = \log(1 + x)$, indem Sie die Entwicklung des Taylorpolynoms mit steigendem Grad analysieren.

Aufgabe 3 Verwenden Sie den Satz von de l'Hospital zum Bestimmen der folgenden Grenzwerte, falls möglich, oder begründen Sie, warum der Satz nicht anwendbar ist:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + 2x^2}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{3(\cos x - 1)}{2x^2}, \quad \lim_{x\to -3} \frac{\sin(x + 3)}{x^2 + x - 6}, \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \log(x)}.$$

Aufgabe 4 Mit Hilfe der Monotonie, Extremstellen, Wendepunkte, Konvexität/Konkavität, Nullstellen und der Grenzwerte an den Randpunkten des Definitionsbereiches kann ein sehr anschauliches Bild einer (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion gewonnen werden. Berechnen Sie die entsprechenden Daten und erstellen Sie anhand dieser eine Handskizze der folgenden Funktionen:

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x(x-1)}{x+1}, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0,\\ \mathrm{e}^{-1/x^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ergänzung zur Kurvendiskussion: Sei $f\colon D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Diese heißt *konvex* bzw. *konkav*, falls die erste Ableitung f' monoton wächst bzw. monoton fällt. Geometrische Deutung: Ist f konvex bzw. konkav, so liegt die Kurve $y = f(x)$ oberhalb bzw. unterhalb jeder Kurventangente. Ist f zweimal differenzierbar, dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ ist konvex} \quad &\Longleftrightarrow \quad f'' \geq 0,\\ f \text{ ist konkav} \quad &\Longleftrightarrow \quad f'' \leq 0. \end{aligned}$$

Die Funktion f hat in ξ einen *Wendepunkt*, wenn die zweite Ableitung f'' in ξ das Vorzeichen wechselt. Folglich ist der Kurvenpunkt $(\xi, f(\xi))$ eine Übergangsstelle zwischen konvexem und konkavem Verhalten. In einem Wendepunkt durchschneidet die Tangente die Kurve.

Aufgabe 5 Implementieren Sie eine Funktion $\mathrm{newton\_approx}(f, x_0, \varepsilon, \delta, \max)$ in Sage, die das Newton-Verfahren mit Startwert x_0 auf eine Funktion f anwendet, um so eine Näherung ξ einer Nullstelle von f zu finden. Die Prozedur soll so lange wiederholt werden, bis der Fehler klein genug ist ($|f(\xi)| < \varepsilon$) oder eine maximale Anzahl von Iterationen erreicht ist (gegeben durch das Argument max). Es dürfen nur die Grundrechnungsarten und die Sage-Funktion n zum numerischen Auswerten verwendet werden; verwenden Sie daher die Näherungsformel $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)}{2\delta}$ für die erste Ableitung. Geben Sie außerdem sinnvolle Defaultwerte für $\varepsilon, \delta, \max$ vor.

a) Approximieren Sie mit Ihrer Implementierung die drei Nullstellen der Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 23x^2 + 9x + 74.$$

b) Approximieren Sie weiters die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen

$$\begin{aligned} f&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathrm{e}^{\cos(x)},\\ g&\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2. \end{aligned}$$

Geben Sie die Anzahl der nötigen Iterationen aus und versuchen Sie unterschiedliche Startwerte.