Analysis 326.022 · Winter 2013/2014 · **Vorlesungsklausur** 12.02.2014

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2^n}, \qquad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sqrt{n}}{n}, \qquad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Lösung. a) Wegen $|\frac{(-1)^n}{n+2^n}| = \frac{1}{n+2^n} \leq (\frac{1}{2})^n$ und der Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2})^n$ folgt aus dem Majorantenkriterium, dass die Reihe konvergiert.

b) Wegen $\frac{1+\sqrt{n}}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0$ und der Divergenz der harmonischen Reihe folgt aus dem Minorantenkriterium, dass die Reihe divergiert.

c) Wegen $\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!}\right| = \frac{(n+1)n!n^n}{(n+1)n!(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}} < 1$ $(n \to \infty)$ folgt aus dem Quotientenkriterium, dass die Reihe konvergiert.

Aufgabe 2 Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt,* falls gilt

$$\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in D : |f(x)| \leq M.$$

a) Geben Sie je ein Beispiel für eine Funktion, die beschränkt ist, und eine Funktion, die nicht beschränkt ist.

b) Zeigen Sie: Wenn zwei Funktionen $f, g\colon D \to \mathbb{R}$ beschränkt sind, dann ist auch ihre Summe $f + g\colon D \to \mathbb{R}, (f+g)(x) := f(x) + g(x)$ beschränkt.

Lösung. a) Beschränkt ist z. B. $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$; unbeschränkt ist z. B. $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

b) Seien $M_f, M_g \in \mathbb{R}$ so, dass gilt

$$\forall\, x \in D : |f(x)| \leq M_f \quad \text{und} \quad \forall\, x \in D : |g(x)| \leq M_g.$$

Die Existenz solcher Zahlen folgt aus der Annahme, dass f und g beschränkt sind. Zu zeigen ist $\exists\, M \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in D : |f(x)+g(x)| \leq M$. Wähle $M = M_f + M_g$. Wir zeigen $\forall\, x \in D : |f(x)+g(x)| \leq M$ für dieses M. Sei $x \in D$. Dann gilt $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_f + M_g = M$, weil M_f und M_g gerade so gewählt waren.

Aufgabe 3 Betrachten Sie die Funktion $f\colon [0,10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Wählen Sie eine Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_3)$ des Definitionsbereichs in drei Teile und einen zu Z passenden Zwischenvektor $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_3)$, und berechnen Sie die Riemannsche Zwischensumme $\sigma_f(Z, \xi)$.

Lösung. Zum Beispiel $Z = (0, 4, 6, 10)$, $\xi = (2, 5, 8)$, $\sigma_f(Z, \xi) = f(2)(4-0) + f(5)(6-4) + f(8)(10-6) = 16 + 50 + 256 = 322$

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x^2 - 3xy + 2y^2$ auf Extremstellen.

Lösung. Es gilt $\operatorname{grad} f(x,y) = (4x - 3y, -3x + 4y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$. Es kommt also nur der Punkt $(0,0)$ für eine Extremstelle in Frage. Dort gilt $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ und deshalb $\det(H_f(0,0) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ -3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 9 = 0 \iff \lambda = 4 \pm 3$. Da beide Eigenwerte positiv sind, liegt im Punkt $(0,0)$ ein Minimum vor.

Aufgabe 5 Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, -xy)$.

a) Berechnen Sie die Divergenz von f.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma f(x,y)\cdot ds$ für die Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t, t)$.

Lösung. a) $\operatorname{div} f = D_1 f_1 + D_2 f_2 = 1 - x$
b) $\int_\gamma f(x,y)\cdot ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 \binom{\mathrm{e}^t+t}{-t\mathrm{e}^t}\cdot\binom{\mathrm{e}^t}{1}dt = \int_0^1(\mathrm{e}^{2t}+t\mathrm{e}^t-t\mathrm{e}^t)dt = [\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2t}]_0^1 = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$.

Diejenigen, die keinen Eingabezettel hatten und mit dem an der Tafel angegebenen Feld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x,y) = (x+y, +xy)$ gearbeitet haben, müssten folgendes herausbekommen haben:
a) $\operatorname{div} f = D_1 f_1 + D_2 f_2 = 1 + x$
b) $\int_\gamma f(x,y)\cdot ds = \int_0^1 f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^1 \binom{\mathrm{e}^t+t}{t\mathrm{e}^t}\cdot\binom{\mathrm{e}^t}{1}dt = \int_0^1(\mathrm{e}^{2t}+2t\mathrm{e}^t)dt = \int_0^1 \mathrm{e}^{2t}dt + 2\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt$.
Für das ersten Integral bekommt man wie oben $\frac{1}{2}(\mathrm{e}^2-1)$. Das zweite kann man mit partieller Integration erledigen: $\int_0^1 t\mathrm{e}^t dt = [t\mathrm{e}^t]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^t dt = (\mathrm{e}-0) - [\mathrm{e}^t]_0^1 = 1$.
Damit ergibt sich insgesamt $\int_\gamma f(x,y)\cdot ds = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2+3)$. Ich habe bei der Korrektur berücksichtigt, dass diese Rechnung etwas aufwendiger war.