Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2014**
`http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2014/analysis/`

Übungsblatt 1

(Formale Logik)

Besprechung am **16.10.2014**

Aufgabe 1 Übersetzen Sie die folgenden natürlichsprachlichen Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik (unabhängig von ihrem Wahrheitsgehalt). Definieren Sie hierzu, wo notwendig, passende Grundprädikate und -funktionen!

a) "Wenn die Erde eine Scheibe ist, dann haben alle Fische drei Köpfe."
Ist diese Aussage wahr oder falsch?

b) "Es gibt eine größte Primzahl."

c) "Wenn a eine Primzahl ist, die das Produkt von b und c teilt, dann teilt a auch b oder c."

Aufgabe 2 Betrachten wir die Definition des *Grenzwertes* a einer Folge $(a)_n$, der später im Semester noch eine wichtige Rolle spielen wird, dessen Bedeutung für diese Aufgabe jedoch irrelevant ist:

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \implies |a_n - a| < \epsilon$$

a) Schreiben Sie die Aussage so um, dass hinter jedem Quantor nur eine Variable steht (also z.B. $\forall \epsilon : \ldots$).

b) Negieren Sie die Aussage; die Negation ist dabei bis in die innersten Komponenten der Formel zu ziehen! Verwenden Sie dazu $(A \implies B) \iff (\neg A \vee B)$ sowie die *DeMorgan'schen Regeln* $\neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$, $(\neg \exists x : P(x)) \iff (\forall x : \neg P(x))$, etc.

c) Ändert sich die Aussage, wenn man die Reihenfolge der Quantoren vertauscht? (Informelle Begründung genügt)

Aufgabe 3 Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $((\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x))) \implies (\forall x : (p(x) \vee q(x)))$

b) $(\forall x : (p(x) \vee q(x))) \implies ((\forall x : p(x)) \vee (\forall x : q(x)))$

c) $(\forall x : (p(x) \wedge q(x))) \implies ((\forall x : p(x)) \wedge (\forall x : q(x)))$

Aufgabe 4 Beweisen Sie folgende Aussagen mittels gegenseitiger *Inklusion* bzw. *Implikation* (achten Sie bei 2. auf die Klammernsetzung!):

a) $A \backslash B = A \backslash (B \cap A)$

b) $((\exists x : p(x)) \implies Q) \iff (\forall x : (p(x) \implies Q))$

(Hinweis: $A \backslash B$ bedeutet "A ohne B", also $x \in A \backslash B$ genau dann wenn $x \in A$ und $x \notin B$.)

Aufgabe 5 Verschaffen Sie sich Zugang zu einer lauffähigen Installation des Computeralgebrasystems Sage (`http://www.sagemath.org`). Machen Sie sich mit der Benutzeroberfläche, der Dokumentation und der Syntax von Sage vertraut!