Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2014**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2014/analysis/

Übungsblatt 10

Besprechung am **18.12.2014**

Aufgabe 1 Berechnen Sie, falls möglich, die totalen Ableitungen der folgenden Funktionen im Nullpunkt mithilfe von Satz 31(2). Vergessen Sie dabei nicht, dass Satz 31(2) nur *Kandidaten* liefert, die gegebenenfalls noch mittels Definition 24 überprüft werden müssen.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ (b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Aufgabe 2 a) Zeigen Sie, dass die Funktion $u(x, t) = \sin(x + t) + \cos(x - t)$ eine Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

ist.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\frac{x^2}{4t})$ die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

erfüllt.

Aufgabe 3 Verwenden Sie Satz 33, um alle lokalen Extremstellen (auch Art) der folgenden Funktionen zu berechnen:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \exp(x\,y)$ (b) $g : (-1, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{(y-2)^2+x^2}{1-x^2}$

(c) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x\,y\,\exp(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2})$

Aufgabe 4 Berechnen Sie, sofern existent, alle *globalen* Extremwerte der Funktion

$$f : [0, 2]^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^3 + y^2 - (2y + 1)x$$

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Gradientenverfahren zum Auffinden lokaler Minima einer bivariaten Funktion $f(x, y)$ in Sage. Ähnlich einem Bergsteiger, der auf schnellstem Weg das Tal erreichen will, folgt dieses Verfahren dem steilsten Abstieg, um zu einem Minimum zu gelangen. Dabei geht man wie folgt vor: Zunächst wird in einem beliebigen Punkt (x_0, y_0) gestartet, in welchem der Gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ von f berechnet wird – Dies soll näherungsweise analog zum Programmierbeispiel auf dem 7. Übungsblatt geschehen.

Der *negative Gradient* $-\nabla f(x_0, y_0)$ gibt die Richtung des steilsten Abstiegs an, und man folgt dieser Richtung in kleinen Schrittweiten h, solange die Funktionswerte kleiner werden. Sobald das nicht mehr der Fall ist, wird erneut der Gradient berechnet und wie zuvor fortgefahren, und zwar so lange, bis eine vorgegebene maximale Schrittzahl N erreicht ist oder die Norm des Gradienten kleiner als ein vorgegebenes ϵ ist.

Testen Sie Ihre Funktion an den Beispielen

(a) $f(x, y) = \frac{\sin(x\ \cos(x\,y))}{x^2+(1-y)^2+1}$ mit Startwert $(-1.2, 1.0)$

(b) $g(x, y) = x^3 y\ \exp(1 - x^2 - y^2)$ mit Startwert $(0.5, 0.5)$