Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2014**
`http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2014/analysis/`

Übungsblatt 11

Hinweis: Die Lösungen sind schriftlich auszuarbeiten und am **15.01.2015** abzugeben.

Aufgabe 1 Folgen und Reihen

a) Bestimmen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{n^2} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x\exp(x) - 4\cos(x) - 3x^2 - x + 4}$$

Hinweis zur ersten Folge: Versuchen Sie, den Zähler nach oben durch n abzuschätzen.

b) Bestimmen Sie, für welche x die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\exp(n^2 x)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{f(n)} x^{2n}$$

wobei $f(n) := \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{falls } n \text{ eine Primzahl ist} \\ n, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 2 Es sind

$$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2}$$
$$\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2}$$

der sogenannte *Sinus Hyperbolicus* bzw. *Cosinus Hyperbolicus.*

a) Zeigen Sie, dass $\cosh(x)$ ein lokales Minimum bei $x = 0$ annimmt.

b) Zeigen Sie, dass $\sinh(x)$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend ist.

c) Zeigen Sie, dass $\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

d) Sei $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Umkehrfunktion von sinh (der sogenannte *Areasinus Hyperbolicus*). Berechnen Sie $\operatorname{arsinh}'(y_0)$ in einem beliebigen $y_0 \in \mathbb{R}$.

e) Geben Sie die Taylorreihenentwicklung von $\cosh(x)$ an.

Aufgabe 3 Mit Hilfe von Nullstellen, Monotonie, Extremstellen, Wendepunkten und der Grenzwerte an den Randpunkten des Definitionsbereiches kann ein sehr anschauliches Bild einer (hinreichend oft differenzierbaren) Funktion gewonnen werden. Berechnen Sie die entsprechenden Daten und erstellen Sie anhand dieser eine Handskizze der folgenden Funktion:

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{-2\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 2}.$$

Hinweis: Behandeln Sie die Funktion als stückweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{x+2}, & x \in (-\infty, -2), \\ \frac{x^2-3x-4}{x+2}, & x \in (-2, \infty). \end{cases}$$

Aufgabe 4 Sei

$$f\colon [-2,2] \to \mathbb{R},\ f(x) = 5x + 2 \quad \text{und} \quad g\colon [-2,2] \to \mathbb{R},\ g(x) = x\, e^{\frac{x^2}{2}} + 2.$$

a) Berechnen Sie alle Stammfunktionen für f und g.

b) Berechnen Sie die Fläche, welche

   i) zwischen den Funktionen f und g eingeschlossen wird,

   ii) oberhalb der x-Achse und sowohl unterhalb von f als auch unterhalb von g liegt.

Aufgabe 5 Mehrdimensionale Integrale

a) Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int_0^1 \int_{-1}^x xy - x^3 \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x, \qquad \int_D \sin(x+y) \,\mathrm{d}(x,y),\ \text{wobei } D = \{(x,y) : 0 \le x, y \le \frac{\pi}{2}\}.$$

b) Berechnen Sie das Volumen des von der Fläche $f(x,y) = x^4 - 2y$ begrenzten Körpers über dem Bereich $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -x^2 \le y \le x^2\}$.

c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, welche zwischen den beiden Schnittpunkten von $y = x^2$ und $x + y = 2$ eingeschlossen wird, mit einem Doppelintegral.

Aufgabe 6 Berechnen Sie das Volumen der Kuppel, welche entsteht wenn die Sphäre $\{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ mit der Ebene $\{(x,y,z) : z = 1\}$ geschnitten wird. Verwenden Sie dazu eine geeignete Koordinatentransformation und begründen Sie alle Ihre Rechenschritte.