Übungsblatt 12

Besprechung am **22.1.2014**

Aufgabe 1 Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Kurve mit der x- bzw. y-Achse:

$$f : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t(t^2 - 1), e^t - 2).$$

Berechnen Sie außerdem die jeweilige Durchlaufgeschwindigkeit an jedem dieser Punkte. Geben Sie eine Kurve an, die die gleichen Punkte wie f durchläuft, aber mit doppelter Geschwindigkeit.

Aufgabe 2 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare (d.h. die Ableitung ist stetig) Funktion. Zeigen Sie folgende Aussage. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ von der Form

$$\gamma(\phi) = \begin{pmatrix} f(\phi)\cos(\phi) \\ f(\phi)\sin(\phi) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f^2(\phi) + (f'(\phi))^2}\, \mathrm{d}\phi.$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie die Länge der folgenden Kurven.

$$f_1 : [0, 2] \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t-1 \\ 3t^2+2 \\ 6t^3-3 \end{pmatrix}, \quad f_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} (1+\cos(t))\cos(t) \\ (1+\cos(t))\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $2\cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$.

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

$$\text{a)} \int_{\gamma_1} y\, \mathrm{d}s, \qquad \text{b)} \int_{\gamma_2} \sqrt{\frac{a^2y^2}{b^2} + \frac{b^2x^2}{a^2}}\, \mathrm{d}s,$$

wobei γ_1 der obere Halbkreis mit Radius r ist und γ_2 die Ellipse mit den Hauptachsen a, b.
Hinweis: Die Ellipse wird durch folgende Kurve beschrieben: $t \mapsto (a\cos(t), b\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe 5 Implementieren Sie ein Programm in Sage, das näherungsweise die Länge einer gegebenen Kurve $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ berechnet. Testen Sie Ihr Programm an den Kurven aus Aufgabe 3 sowie an der Kurve $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, \sqrt{1-t^2})$, um eine Näherung an π zu berechnen.