Übungsblatt 13

Besprechung am **29.1.2015**

Aufgabe 1 Berechnen Sie Divergenz und Rotation für die folgenden dreidimensionalen Vektorfelder. Welche der Felder sind quellen-, welche wirbelfrei?

a) $f_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \big(xy, yz, xz\big)$,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \big(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\big)$, wobei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

c) $f_3\colon (0,\infty)^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \big(\log(x\mathrm{e}^{-x\mathrm{e}^z}), x^2+y^2-y/x, \log(x)-2yz+\mathrm{e}^z\big)$.

Aufgabe 2 Beweisen Sie Satz 39 aus dem Skriptum: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^3$ und die Vektorfelder $f, g\colon D \to \mathbb{R}^3$ koordinatenweise (zweimal stetig) differenzierbar, die Gebirgsfunktion $h\colon D \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) $\operatorname{div}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{div}(f) + \beta \operatorname{div}(g)$,

b) $\operatorname{rot}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{rot}(f) + \beta \operatorname{rot}(g)$,

c) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}(h)) = (0,0,0)^T$,

d) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}(f)) = 0$.

Aufgabe 3 Berechnen Sie das Kurvenintegral von f entlang γ mit Hilfe von Definition 35 aus dem Skript, wobei

a) $f_1\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (xy, y^2)$ und $\gamma_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t, t^2)$,

b) $f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (xy, yz, xz)$ und $\gamma_2\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, t^2, t^3)$.

Aufgabe 4 Gegeben sei das Vektorfeld $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto \big(y^2, 2xy - \mathrm{e}^{2y}\big)$ und die Kurve $\gamma\colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$. Berechnen Sie das Kurvenintegral von f entlang γ. Verwenden Sie dazu Satz 40 vom Skript falls dies möglich ist, oder begründen Sie warum der Satz nicht anwendbar ist.

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Programm in Sage, welches zu einem gegebenen zweidimensionalen Vektorfeld f einen Plot der Feldlinien erstellt. Eine Feldlinie kann man sich vorstellen als diejenige Wegkurve, entlang der sich ein Teilchen bewegt, welches immer der Richtung des Feldes folgt. Formaler ausgedrückt: die Tangente an eine Feldlinie in einem Punkt (x,y) stimmt mit der Richtung des Vektorfeldes $f(x,y)$ in diesem Punkt überein. Testen Sie Ihr Programm an den Vektorfeldern $f_1(x,y) = (y^2, x^2)$, $f_2(x,y) = (xy, y^2)$ und $f_3(x,y) = (y^2, 2xy - e^{2y})$.
Hinweis: Im Unterschied zu `plot_slope_field` sollen durchgezogene Linien entstehen. Es ist ein bisschen Experimentierfreude gefragt, wie man das am besten erreicht, eine kanonische Lösung gibt es nicht. Der Plot muss am Ende auch nicht perfekt aussehen.