Übungsblatt 2

Besprechung am **23.10.2014**

Aufgabe 1 Beweisen Sie die folgenden Aussagen nur unter Verwendung der Körperaxiome aus Definition 1 im Skriptum.

a) Für alle a, $b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $a + x = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{R}$, nämlich $x = b - a$.

b) Für alle a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ hat die Gleichung $ax = b$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{R}$, nämlich $x = a^{-1}b$.

Aufgabe 2 Beweisen Sie die folgenden Aussagen nur unter Verwendung der Körperaxiome aus Definition 1 im Skriptum und den bereits bewiesenen Aussagen des Übungsblatts.

a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.

b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $xy = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ oder $y = 0$.

Aufgabe 3 Zeigen Sie mit Hilfe des Beweisprinzips der vollständigen Induktion

$$(P(0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} : P(n) \Rightarrow P(n+1))) \Rightarrow (\forall n \in \mathbb{N} : P(n))$$

die folgenden Aussagen:

a) $\forall n \in \mathbb{N} : \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 2 - \frac{1}{2^n}$.

b) Sei $a \in \mathbb{N}$. Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ ist $a^{n+1} + (a+1)^{2n-1}$ durch $a^2 + a + 1$ teilbar.

c) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 1 \,:\, (1+x)^n \leq 1 + (2^n - 1)x$.

Aufgabe 4 Zeigen Sie die Dreiecksungleichung.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \, |x + y| \leq |x| + |y|$$

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Programm in Sage, das eine gesuchte ganze Zahl z im Intervall $[1, 100000]$ findet.
Gehen Sie dabei folgendermaßen vor: Fixieren Sie ein $z \in [1, 100000]$ und definieren Sie eine Funktion $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, die entscheidet, ob n größer, kleiner oder gleich der Zahl z ist. Nun schreiben Sie eine Funktion, die als Input f nimmt und die gesuchte Zahl z findet.