Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2014**
http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2014/analysis/

Übungsblatt 3

Besprechung am **30.10.2014**

Aufgabe 1 Verwenden Sie Definition 4 aus der Vorlesung um zu zeigen, dass die Folge $a_n = 3n^2/(n^2-1)$ gegen 3 konvergiert. Die nachfolgenden Sätze aus der Vorlesung dürfen nicht verwendet werden.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie, ob diese Folgen für $n > 0$ konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

$$\begin{array}{rclcrcl} a_n &=& n - \frac{n^2+n+1}{n}, & \qquad & b_n &=& \frac{5}{2n} + \frac{n}{n+2}, \\ c_n &=& \frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2(n^2+n+1)}}, & & d_n &=& (-1)^n \cdot \frac{(n+1)(n+2)}{n^3-n}, \\ e_n &=& \frac{n!}{2^n}, & & f_n &=& \sqrt[n]{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}}. \end{array}$$

Aufgabe 3 Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Folgen konvergieren, und bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert:

$$(x^n)_{n\geq 1}, \qquad \left(\left(-\frac{x}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1}, \qquad \left(\frac{x^n-1}{x^n+1}\right)_{n\geq 1}.$$

Aufgabe 4 Beweisen Sie Satz 5(2) aus der Vorlesung:
Seien $(a_n)_{n=0}^{\infty}, (b_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen mit $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.
Zeigen Sie, dass

$$a_n \cdot b_n \xrightarrow{n\to\infty} a \cdot b.$$

Aufgabe 5 Ermitteln Sie eine Rekursionsformel, mit der die Glieder der Folge $a_n = (x^n)_{n\geq 1}$ aus Aufgabe 3 sukzessive berechnet werden können. Schreiben Sie damit ein Programm in Sage, das die ersten N Glieder der Folge zu beliebigem $x \in \mathbb{R}$ berechnet. Überprüfen Sie das Konvergenzverhalten für verschiedene Werte von x und plotten Sie die Ergebnisse.