Übungsblatt 4

Besprechung am **6.11.2014**

Aufgabe 1 Prüfen Sie die folgenden Reihen (z. B. mithilfe der Kriterien aus der Vorlesung) auf Konvergenz:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{3n^3+5n^2+n+2}, \quad \text{b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 2^n}{n^n}, \quad \text{c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{2n}}, \quad \text{d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}, \quad \text{e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Aufgabe 2 Ein (unsterblicher, geduldiger) Wurm kriecht auf einem 1 Meter langen Gummiband vorwärts. Hat er einen Zentimeter zurückgelegt, muss er erst einmal ein wenig verschnaufen. In jeder dieser Pausen wird das Gummiband gleichmäßig auseinandergezogen, sodass es insgesamt einen Meter länger wird.

Der Wurm startet seine Odyssee an einem der beiden Enden des Bandes. Erreicht er jemals das andere Ende?

Aufgabe 3 Sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie (etwa anhand eines Gegenbeispiels) die folgenden Aussagen:

a) $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0) \implies (\exists a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a)$

b) $(\exists a \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a) \implies (\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$

Aufgabe 4 Bestimmen Sie, für welche x die folgenden Reihen konvergieren:

$$\text{a)} \sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n, \qquad \text{b)} \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \exp(x) x^n, \qquad \text{c)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \, \frac{n^2-2nk+k^2}{k!} \right) x^n.$$

Aufgabe 5 Implementieren Sie Funktionen in Sage, welche Näherungen für die Exponential-, Sinus- und Kosinusfunktion berechnen, indem sie die Reihendarstellung aus Definition 8 nach N Schritten abbrechen (N soll ein zusätzlicher Parameter der Funktionen sein).

Testen Sie Ihre Funktionen für $x = 0.00001, 1.5, 500.5$ und verschiedene N, und vergleichen Sie die Ergebnisse mit den in Sage eingebauten Funktionen exp(), sin() und cos().