Übungsblatt 5

Besprechung am **13.11.2014**

Aufgabe 1 Zeigen Sie folgende Grenzwerte mit Hilfe der Definition 10 aus dem Skriptum. Wählen Sie dazu ein passendes δ.

a) Sei $f\colon [0,1) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Zeigen Sie $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

b) Sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Ist die Funktion g stetig im Punkt 0?

Aufgabe 2 Zeigen Sie folgende Aussage. Sind $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon f(D) \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen, dann ist auch $g \circ f\colon D \to \mathbb{R}, x \mapsto g(f(x))$ stetig.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit!

a) $f_1\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = (x^2+1)\sin\left(\frac{1}{x}\right) + \cos\left(\exp(x^2) - \sin(2x)\right)$

b) $f_2\colon [-1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

c) $f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1}, & \text{falls } x \geq 0, \\ -\sqrt{1-x}, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$

d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$

Aufgabe 4 Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass die Gleichung $x \cdot e^x = 2 - x$ mindestens eine Lösung $x \in \mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 5 Implementieren Sie das auf dem Zwischenwertsatz basierende Bisektionsverfahren zur Approximation einer Nullstelle in Sage. Gegeben sind eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sowie ein Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$, sodass $f(a)$ und $f(b)$ unterschiedliche Vorzeichen besitzen. In jedem Schritt wird das Intervall halbiert und in jener Hälfte des Intervalls weitergesucht, bei dem f angewandt auf die beiden Grenzen des Intervalls unterschiedliche Vorzeichen ergibt. Unterschreitet die Länge des Intervalls einen bestimmten Wert (z.B. 10^{-10}), wird das Verfahren abgebrochen und der Mittelpunkt des aktuellen Intervalls als Ergebnis ausgegeben. Sollte bei einem Zwischenschritt eine Grenze des Intervalls bereits Nullstelle sein, wird diese Grenze natürlich unmittelbar als Ergebnis ausgegeben.
Testen Sie ihr Programm für die Funktion $f(x) = x \cdot e^x + x - 2$ und das Startintervall $[0,1]$ sowie für mindestens zwei weitere Funktionen.