Analysis (Mathematik 2 für Informatiker) **Wintersemester 2014**
`http://www.risc.jku.at/education/courses/ws2014/analysis/`

Übungsblatt 6

Besprechung am **20.11.2014**

Aufgabe 1 Sei $D \subseteq \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie die erste Ableitung in einem beliebigen Punkt $x_0 \in D$ mit Hilfe einer der äquivalenten Definitionen $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bzw. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ für Differenzierbarkeit, oder zeigen Sie dass diese nicht existiert. Die nachfolgenden Sätze aus der Vorlesung dürfen nicht verwendet werden.

$$f_1(x) = 5x - x^2 \text{ für } D = \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \frac{-3}{x^2} \text{ für } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad f_3(x) = \sqrt{x-1} \text{ für } D = [1, \infty).$$

Aufgabe 2 Zeigen Sie zunächst, dass $(\cos(x))' = -\sin(x)$. In welchen Punkten ihres Definitionsbereichs ist die Umkehrfunktion des Cosinus (die sogenannte Arkuscosinus-Funktion)

$$\arccos\colon \big[-1, 1\big] \to \big[0, \pi\big], \quad \cos^{-1}(x) =: \arccos(x)$$

stetig und in welchen differenzierbar? Leiten Sie außerdem eine Formel für die erste Ableitung des Arkuscosinus her!

Aufgabe 3 Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jeweils die Ableitung und den Bereich, auf dem die Ableitung stetig ist:

$$f_1(x) = \cos\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right), \qquad f_2(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) + x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$f_3(x) = \frac{\sqrt[4]{x^2}}{\mathrm{e}^{\cos(x^2+1)}}, \qquad f_4(x) = \begin{cases} x^x, & x > 1, \\ x, & x \leq 1. \end{cases}$$

Aufgabe 4 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit $|f^{(n)}(x)| \leq 3$, für alle n.

a) Finden Sie das kleinste Taylorpolynom $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, welches die Funktion f an der Stelle $1/2$ auf vier Dezimalstellen genau approximiert.

b) Finden Sie den Wertebereich, für welchen Sie sicher sein können, dass $T_5(x)$ die Funktion f mit einer Genauigkeit von $\pm\frac{1}{20}$ approximiert.

Aufgabe 5 Schreiben Sie ein Sage-Programm $approx\_derivative(f, x_0, h, k)$, welches nur mit den Funktionswerten $f(x_j)$ einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an den Stellen $x_j = x_0 + jh$, $j \in \mathbb{Z}$, für eine gegebene Schrittweite $h > 0$ die k-te Ableitung $f^{(k)}(x_0)$ in $x_0 \in \mathbb{R}$ annähert. (Vorhandene Funkionen zur Berechnung einer Ableitung oder des Grenzwertes dürfen nicht verwendet werden.)

Testen Sie das Programm anhand einiger unterschiedlicher Funktionen.

Wie groß ist der Fehler Ihrer Approximation von $f^{(6)}(1)$ bzw. $f^{(5)}(\frac{6}{5})$ für $f(x) = \mathrm{e}^x$ bei $h = \frac{1}{100}$? Der Fehler sollte in beiden Fällen kleiner als $\frac{1}{1000}$ sein.