Übungsblatt 7

Besprechung am **27.11.2014**

Aufgabe 1 Verwenden Sie den Satz von de l'Hospital zum Bestimmen der folgenden Grenzwerte (falls möglich) oder begründen Sie, warum der Satz nicht anwendbar ist:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{2x^2-3x}\qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi\, x)}{\log(x)-x^2+x}\qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 1}\frac{x^x-x}{1-x+\log(x)}\qquad \text{(d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)+4x^2-x}{\exp(x)+\exp(-x)-2}$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie, sofern existent, die globalen Extremwerte der folgenden, auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Funktionen, sowie alle Werte x, bei denen die Extremwerte angenommen werden:

$$\text{(a)}\quad f(x)=\exp(-x^2)\qquad\qquad \text{(b)}\quad g(x)=\begin{cases}\frac{x+1}{x-1}, & x\le -1\\ \frac{1}{(x-1)(x+1)}+2, & -1<x\le 1/2\\ \exp(-2x), & 1/2<x\end{cases}$$

Aufgabe 3 Mit Hilfe der Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte und der Grenzwerte an den Randpunkten des Definitionsbereiches kann ein sehr anschauliches Bild einer (hinreichend oft) differenzierbaren Funktion gewonnen werden. Berechnen Sie diese Daten und erstellen Sie daraus eine Handskizze der Funktion

$$f:(-\infty,1)\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{x(x+3)}{1-x}$$

Berechnen Sie außerdem sämtliche lokalen und globalen Extremwerte.
Hinweis: Ein *Wendepunkt* von f ist ein Punkt, in dem sich das Vorzeichen von f'' ändert.

Aufgabe 4 Bestimmen Sie die Reihendarstellung von $\log(1+x)$, indem Sie die Entwicklung des Taylorpolynoms mit steigendem Grad analysieren.

Aufgabe 5 Implementieren Sie das Newtonverfahren in Sage, d. h. implementieren Sie eine Funktion `newton_approx`$(f, x_0, max, \epsilon, \delta)$ welche das Newtonverfahren auf die Funktion f mit Startwert x_0 anwendet. Das Verfahren soll abgebrochen werden, sobald der Fehler $|f(x_n)|$ hinreichend klein ist (kleiner als ϵ), oder eine maximale Anzahl von Iterationen ausgeführt wurde (gegeben durch max).

Verwenden Sie in Ihrer Implementierung nur die Grundrechnungsarten. Das bedeutet, dass Sie $f'(x)$ durch $f'(x)\approx\frac{f(x+\delta)-f(x-\delta)}{2\delta}$ approximieren müssen. Geben Sie außerdem sinnvolle Defaultwerte für max, ϵ und δ vor.

Verwenden Sie Ihre Implementierung, um die drei reellen Nullstellen des Polynoms

$$p(x)=-x^5-9x^4+5x^3-7x^2+2x+6$$

sowie die beiden Schnittpunkte der Funktionsgraphen von f und g zu berechnen, wobei

$$f(x)=3\,\log\left(\frac{1+x^2}{2+x^2}+2\right)-3,\quad g(x)=\frac{\cos(\exp(x-2))}{5}.$$

Versuchen Sie unterschiedliche Startwerte x_0 und geben Sie die Anzahl der Iterationen aus.