Übungsblatt 9

Besprechung am **11.12.2014**

Aufgabe 1 Sei $x = (1,0,0)$, $y = (0,1,0)$, $z = (0,0,1)$, und weiters $a = 3x - y + z$, $b = 2x + 3y - z$.

a) Berechnen Sie den Einheitsvektor in Richtung $2a - b$.

b) Ist die Folge $a_n = (n^{-1}, \sqrt[n]{n}, n^n) \cdot (a+b)$ für $n \to \infty$ konvergent? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

c) Ist die Folge $b_n = \sqrt[n]{n}(a+b) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)y + a_n z$ für $n \to \infty$ konvergent? Bestimmen Sie im Fall der Konvergenz den Grenzwert.

Aufgabe 2 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Konvergenz im Punkt $\vec{0}$.

$$f_1(x,y,z) = \sqrt{(x^2 - z)^2 + 1} + \sin(yz), \quad f_2(x,y) = \frac{2xy^3}{x^4 + y^4}, \quad f_3(x,y) = \frac{x^4 + y^4}{x^4 - x^3y + xy^3 + y^4}.$$

Aufgabe 3 Gegeben sei die Funktion $f(x,y,z) = 2xz^2\cos(\pi y)$. Bestimmen Sie die Richtungsableitung am Punkt $(1,2,-1)$, in Richtung des Punktes $(2,1,3)$. Verwenden Sie dazu Definition 23.1 aus der Vorlesung! Berechnen Sie weiters den Gradienten $\nabla f(x,y,z)$ und $\nabla f(1,2,-1) \cdot v$, wobei v der obige Richtungsvektor ist.

Aufgabe 4 Beweisen Sie Satz 30: Eine Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle Koordinatenfolgen $\left(x_1^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}, \ldots, \left(x_n^{(k)}\right)_{k=0}^{\infty}$ konvergieren.

Aufgabe 5 Die *Newton-Cotes-Formeln* sind sogenannte Quadraturformeln, die der numerischen Approximation von Integralen dienen. Eine solche Formel, die Kepler'sche Fassregel, wurde bereits vorgestellt. Eine Quadraturformel nähert das Integral einer Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch eine Summe von gewichteten Funktionswerten an, d.h.

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i),$$

wobei $(x_i)_{i=1}^n$ Stützstellen und w_i Gewichte sind, die für unterschiedliche Quadraturformel unterschiedlich berechnet werden.

Die Idee der Newton Cotes Formeln ist, dass die zu integrierende Funktion f durch ein Polynom angenähert wird, d.h. man erzeugt ein Interpolationspolynom $p_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$, wobei $p_n(x_i) = f(x_i)$ und $x_i = \frac{i}{n}$, $0, \ldots, n$, äquidistante Stützstellen im Interval [0,1] sind. Ein Näherungswert für das Integral ergibt sich dann durch Integrieren dieses Polynoms, d.h.

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 \sum_{i=0}^{n} c_i x^i dx.$$

Schreiben Sie ein Programm in Sage, welches zu gegebenem n die Gewichte der entsprechenden Newton-Cotes-Formel berechnet.

Hinweise: Berechnen Sie zunächst die Koeffizienten $(c_i)_{i=0}^n$ des Polynoms p_n. Eine beliebig lange Liste von Variablen kann in Sage wie folgt erzeugt werden:

```
v = list(var('v%d' % i) for i in range(n + 1))
```

Zum Vergleich: die Gewichte für $n = 2$ lauten $\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}$, für $n = 3$ erhält man $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}$.