Analysis 326.022 · Winter 2014/2015 · **Vorlesungsklausur** 13.03.2015

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Was ist die anschauliche Bedeutung von Richtungsableitung und totaler Ableitung? Folgt aus der Existenz aller Richtungsableitungen die Existenz der totalen Ableitung? Folgt aus der Existenz der totalen Ableitung die Existenz aller Richtungsableitungen?

Lösung. Seien $f\colon D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $\xi \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Richtungsableitung von f im Punkt ξ in Richtung v: Steigung der Tangentialgeraden im Punkt ξ an die Kurve, die entsteht, wenn man den Funktionsgraph von f mit einer vertikalen Ebene durch die Punkte $(\xi, 0)$ und $(\xi + v, 0)$ schneidet.

Totale Ableitung von f im Punkt ξ: Neigung des Tangentialraums (z.B. bei $n = 2$ der Tangentialebene) an den Graph von f im Punkt $(\xi, f(\xi))$.

Aus der Existenz der Richtungsableitung folgt *nicht* die Existenz der totalen Ableitung. Umgekehrt schon.

Aufgabe 2 Sei $A \subseteq \mathbb{R}$. Zur Erinnerung: A heisst *nach oben beschränkt*, falls gilt

$$\exists\, S \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in A : x \leq S,$$

und *nach unten beschränkt,* falls gilt

$$\exists\, S \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in A : x \geq S.$$

Zeigen Sie: Wenn A nach oben beschränkt ist, dann ist $B := \{-x : x \in A\}$ nach unten beschränkt.

Lösung. Zu zeigen ist: $\exists\, S \in \mathbb{R}\ \forall\, x \in B : x \geq S$. Wähle $S \in \mathbb{R}$ so, dass $\forall\, x \in A : x \leq S$. So ein S existiert, da A nach Annahme nach oben beschränkt ist. Wir zeigen: $\forall\, x \in B : x \geq -S$. Sei $x \in B$ beliebig. Nach Definition von B ist dann $-x \in A$ (denn $-(-x) = x$). Nach Wahl von S gilt deshalb $-x \leq S$, und daraus folgt $x \geq -S$.

Aufgabe 3 Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

$$\text{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^n \qquad \text{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}} \qquad \text{c)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}.$$

Lösung. a) konvergiert. Beweis mit dem Wurzelkriterium:

$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{n+3}{3n+1}\right)^n\right|} = \frac{n+3}{3n+1} \to \frac{1}{3} < 1 \ (n \to \infty)$.

b) konvergiert. Beweis mit dem Majorantenkriterium:

$\left|\frac{1}{\sqrt{n^3(n+1)}}\right| = \frac{1}{n\sqrt{n(n+1)}} \leq \frac{1}{n\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist aus der Vorlesung als konvergent bekannt.

c) divergiert. Beweis: $\sqrt[n]{n} \to 1$ für $n \to \infty$, also $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1 \neq 0$ für $n \to \infty$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für eine konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ immer $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ gelten muss.

Oder mit dem Minorantenkriterium, indem man z.B. zeigt, dass $\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \geq 1$ und die Divergenz der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ verwendet.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \mathrm{e}^{(x-1)^2} + (x-y)^2$ auf Extremstellen.

Lösung. $\nabla f(x, y) = \big(2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2} + 2(x-y),\ -2(x-y)\big)$. $\nabla f(x, y) = 0 \iff 2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2} + 2(x-y) = 0 \wedge -2(x-y) = 0$. Die zweite Gleichung liefert $x = y$, und damit vereinfacht sich die erste Gleichung zu $2(x-1)\mathrm{e}^{(x-1)^2} = 0$. Diese Gleichung hat die eindeutige Lösung $x = 1$, weil die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat. Der einzige Punkt (x, y) mit $\nabla f(x, y) = 0$ ist also $(x, y) = (1, 1)$. An allen anderen Punkten kann kein Extremum vorliegen.

$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{(x-1)^2} + 4(x-1)^2\mathrm{e}^{(x-1)^2} + 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$, also $H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

$\det(H_f(1, 1) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 6\lambda + 4 = 0 \iff \lambda = 3 \pm \sqrt{5}$.

Da beide Eigenwerte positiv sind, liegt im Punkt $(1, 1)$ ein Minimum vor.

Aufgabe 5 In der Vorlesung wurden Kurven als Funktionen $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eingeführt. Im Fall $n = 2$ gibt es eine andere Möglichkeit, Kurven zu beschreiben, und zwar durch Gleichungen, die von den Koordinaten aller Kurvenpunkte erfüllt sein sollen. Man spricht von einer *impliziten* Darstellung. Zum Beispiel ist $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$ eine implizite Darstellung der Einheitskreiskurve.

a) Zeigen Sie, dass die Kurve $\gamma\colon [-5, 5] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ in der Kurve $C = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^2(x + 1) \}$ enthalten ist.

b) Welche Information über eine Kurve ist in der impliziten Darstellung nicht codiert?

Lösung. a) Zu zeigen ist $\forall\, t \in [-5, 5] : \gamma(t) \in C$. Sei $t \in [-5, 5]$ beliebig und $\gamma(t) = (t^2 - 1, t(t^2 - 1)) =: (x, y)$. Dann gilt

$$y^2 - x^2(x + 1) = t^2(t^2 - 1)^2 - (t^2 - 1)^2(t^2 - 1 + 1) = 0,$$

also $(x, y) \in C$.

b) die Durchlaufgeschwindigkeit.