Analysis 326.022 · Winter 2014/2015 · **Zweite Vorlesungsklausur** 09.04.2015

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren.

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{4^n + n^{1000}}{5^n + n^3} \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2+1}} \qquad \text{c)} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}}$$

Lösung. a) $\dfrac{4^n + n^{1000}}{5^n + n^3} = \dfrac{(\frac{4}{5})^n + (\frac{1}{5})^n n^{1000}}{1 + (\frac{1}{5})^n n^3} \to \dfrac{0+0}{1+0} = 0$ für $n \to \infty$.

b) $\dfrac{n}{\sqrt{4n^2+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n^2}}} \to \dfrac{1}{\sqrt{4+0}} = \dfrac{1}{2}$ für $n \to \infty$.

c) Mit dem Sandwichtheorem: Für alle $n \geq 1$ gilt $2 \leq 2 + \frac{1}{n} \leq 3$, daher auch $\sqrt[n]{2} \leq \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} \leq \sqrt[n]{3}$, und da nach Vorlesung $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ ist, folgt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\frac{1}{n}} = 1$.

Aufgabe 2 Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren erste Ableitungsfunktion ebenfalls differenzierbar ist. Es gelte $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und $f''(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Schliesslich sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
Zeigen Sie: Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: Wenn f in x ein Maximum hat, dann hat g in x ein Minimum.

Lösung. Sei $x \in \mathbb{R}$ eine beliebige Maximalstelle von f. Da f differenzierbar ist, muss gelten $f'(x) = 0$, und wegen $f''(x) \neq 0$ muss außerdem gelten $f''(x) < 0$.
Für g gilt $g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2} = 0$ und $g''(x) = \frac{2f'(x) - f(x)f''(x)}{f(x)^3} = -\frac{f''(x)}{f(x)^2}$, weil $f'(x) = 0$. Wegen $f(x)^2 > 0$ und $f''(x) < 0$ gilt also $g''(x) > 0$. Daraus folgt, dass g in x eine Minimalstelle hat.

Aufgabe 3 Sei $f\colon \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0 \wedge y > 0 \wedge z > 0\,\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^{y^z}$. Berechnen Sie den Gradienten von f im Punkt $(x,y,z) = (3,2,1)$.

Lösung. $\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{d}{dx}x^{y^z}, \frac{d}{dy}x^{y^z}, \frac{d}{dz}x^{y^z}\right) = \left(y^z x^{y^z-1}, \log(x)x^{y^z} zy^{z-1}, \log(x)x^{y^z}\log(y)y^z\right)$, also $\nabla f(3,2,1) = (2^1\, 3^{2^1-1}, \log(3)3^{2^1}\, 1\, 2^{1-1}, \log(3)3^{2^1}\log(2)2^1) = (6, 9\log(3), 18\log(2)\log(3))$.

Aufgabe 4 Untersuchen Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{x^4+y^3}{x^3+y^4}$ im Punkt $(0,0)$ auf Konvergenz.

Lösung. Die Funktion ist dort nicht konvergent.

Zum Nachweis betrachte man die Folge $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$. Es gilt $f(x_n, y_n) = \frac{0^3 + \frac{1}{n^3}}{0^4 + \frac{1}{n^4}} = n$. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ existiert nicht, deshalb kann auch der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht existieren.

Aufgabe 5 Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{-y}{x}$ kein Gradientenfeld ist. Betrachten Sie dazu das Kurvenintegral über f entlang einer Kreislinie um $(0,0)$.

Lösung. Sei $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sin t, \cos t)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(x,y)\cdot d(x,y) &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{\sin(t)^2+\cos(t)^2}}_{=1} \underbrace{\begin{pmatrix}-\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\sin(t)\end{pmatrix}}_{=-\cos(t)^2-\sin(t)^2=-1} dt \\
&= \int_0^{2\pi} -1\,dt = -2\pi.
\end{aligned}$$

Da γ eine geschlossene Kurve ist und $-2\pi \neq 0$, folgt die Behauptung.

So wäre es gedacht gewesen. Leider ist mir auf dem Aufgabenzettel ein Tippfehler unterlaufen. Dort stand $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{-x}{y}$. Damit bekommt man für das Kurvenintegral

$$\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\frac{1}{\sin(t)^2 + \cos(t)^2}}_{=1} \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}}_{=-2\sin(t)\cos(t)} dt$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t) = -2 \left[\tfrac{1}{2} \sin(t)^2 \right]_0^{2\pi} = 0,$$

und das ist schlecht, weil sich daraus nicht folgern lässt, dass f kein Gradientenfeld ist. Ich habe die Aufgabe so korrigiert, als wäre bloss verlangt gewesen, das Integral $\int_\gamma f(x,y) \cdot d(x,y)$ auszurechnen.

Die Stammfunktion von $\sin(t)\cos(t)$ findet man übrigens durch partielle Integration:

$$\int \underbrace{\sin(t)}_{u} \underbrace{\cos(t)}_{v'} \, dt = \underbrace{\sin(t)}_{u} \underbrace{\sin(t)}_{v} - \int \underbrace{\cos(t)}_{u'} \underbrace{\sin(t)}_{v} \, dt \quad \Rightarrow \quad 2 \int \sin(t)\cos(t)\, dt = \sin(t)^2$$