Analysis 326.022 · Winter 2014/2015 · **Dritte Vorlesungsklausur** 13.11.2015

Name: .... Matrikelnummer: ....

Aufgabe 1 Wie lautet die Formel, durch die die Stetigkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ definiert ist?

Lösung. $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Aufgabe 2 Zur Erinnerung: Eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

Zeigen Sie: Wenn $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ ist, dann ist auch die Folge $(a_{2n})_{n=0}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert a.

Lösung. Zu zeigen: $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq n_0 : |a_{2n} - a| < \varepsilon$.
Sei $\varepsilon > 0$. Nach Annahme existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $\forall\ n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$. Wähle so ein n_0. Wir zeigen: $\forall\ n \geq n_0 : |a_{2n} - a| < \varepsilon$. Sei also $n \geq n_0$. Dann gilt auch $k = 2n \geq n_0$, weil $n_0 \in \mathbb{N}$ und damit $n_0 \geq 0$ ist. Nach der Wahl von n_0 gilt $\forall\ k \geq n_0 : |a_k - a| < \varepsilon$. Wenn das für alle $k \geq n_0$ gilt, dann insbesondere für das spezielle $k = 2n \geq n_0$. Damit ist gezeigt $|a_{2n} - a| < \varepsilon$, wie gefordert.

Aufgabe 3 Berechnen Sie folgende Grenzwerte, sofern sie existieren:

$$\text{a) } \lim_{x\to 1} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1-x} \qquad \text{b) } \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)} \qquad \text{c) } \lim_{x\to 0} |x|.$$

Lösung. a) Wegen $\lim_{x\to 1}(1-\mathrm{e}^x) = 1 - \mathrm{e} \neq 0$ und $\lim_{x\to 1}(1-x) = 0$ existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 1} \frac{1-\mathrm{e}^x}{1-x}$ nicht.
b) mit l'Hospital: $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(2x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2\cos(0)} = \frac{1}{2}$.
c) Da die Betragsfunktion im Nullpunkt stetig ist, gilt einfach $\lim_{x\to 0} |x| = |0| = 0$.

Aufgabe 4 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + y^2 - 6y - 5$. Bestimmen Sie die Extremwerte von f.

Lösung. $\operatorname{grad} f(x,y) = (x^2 - 2x, 2y - 6) = (0,0) \iff x(x-2) = 0 \wedge y - 3 = 0$.
Damit kommen als Extremalstellen höchstens $(0,3)$ und $(2,3)$ in Frage.
$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
$\det(H_f(0,3) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+2)(\lambda-2) = 0 \iff \lambda = -2 \vee \lambda = -2$. Es gibt sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, also liegt in $(2,0)$ kein Extremum vor.
$\det(H_f(2,3) - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-2) = 0 \iff \lambda = 2$. Alle Eigenwerte sind positiv, also liegt in $(2,3)$ eine Minimalstelle vor.

Aufgabe 5 Es seien $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \big(3y^2 - 2xy + 1,\ 4xy - x + 2y\big)$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\frac{1}{t-2}, \frac{t}{t-2})$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_\gamma (\operatorname{div} f)(x,y)\, d(x,y)$$

Lösung. $\operatorname{div} f(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3y^2 - 2xy + 1) + \frac{\partial}{\partial y}(4xy - x + 2y) = -2y + 4x + 2$.

$\gamma'(t) = \left(-\frac{1}{(t-2)^2}, -\frac{(t-2)-t}{(t-2)^2}\right) = \left(-\frac{1}{(t-2)^2}, \frac{2}{(t-2)^2}\right)$
$||\gamma'(t)|| = \sqrt{\left(-\frac{1}{(t-2)^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{(t-2)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+4}{(t-2)^4}} = \frac{\sqrt{5}}{(t-2)^2}$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \operatorname{div} f(x,y)\, d(x,y) &= \int_0^1 \operatorname{div} f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt \\
&= \int_0^1 \left(-2\frac{t}{t-2} + 4\frac{1}{t-2} + 2\right)\frac{\sqrt{5}}{(t-2)^2}dt \\
&= \sqrt{5}\int_0^1 \frac{-2t+4+2(t-2)}{(t-2)^3}dt = \sqrt{5}\int_0^1 0\, dt = 0.
\end{aligned}$$