Р5 - 5789

Б. Бухбергер

О ВЕЛИЧИНАХ S_i, ОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕКУРСИЕЙ $S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1}$

I. Постановка задачи

Рассмотрим величины S_i , определенные рекурсией:

(I.I) $S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1} \qquad (i \geqslant 2)$,

где u_i, v_i $(i \geqslant 2)$ и S_1, S_2 – элементы произвольного кольца K, например, вещественные числа. Естественно, тогда и $S_i \in K$ для $i \geqslant 3$. Обозначим зависимость величин S_i $(i \geqslant 3)$ от $S_1, S_2, u_2, \ldots, u_{i-1}, v_2, \ldots, v_{i-1}$ следующим образом:

(I.2) $$S_i = \sigma_i (S_1, S_2, u_2, \ldots, u_{i-1}, v_2, \ldots, v_{i-1}) , \quad (i \geqslant 3) .$$

Наша цель – дать явное представление этих функций σ_i . Можно представить σ_i в виде:

(I.3)
$$\sigma_1 (S_1) = S_1 ,$$
$$\sigma_2 (S_1, S_2) = S_2$$
$$\sigma_i (S_1, S_2, u_2, \ldots, u_{i-1}, v_2, \ldots, v_{i-1}) =$$
$$= v_2 \sigma_{i-2} (1, u_3, u_4, \ldots, u_{i-1}, v_4, \ldots, v_{i-1}) S_1 + \sigma_{i-1} (1, u_2, u_3, \ldots, u_{i-1}, v_3, \ldots, v_{i-1}) S_2 ,$$

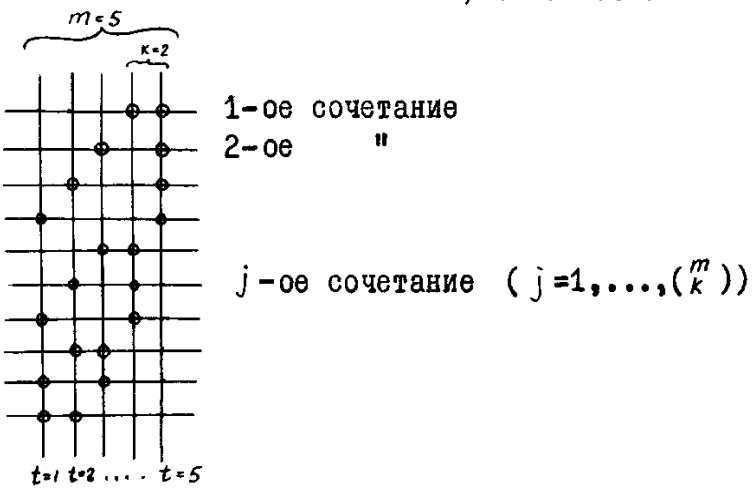
что легко проверяется подстановкой (I.3) в (I.I).

Поскольку в правой части равенства (I.3) первым аргументом функций σ_{i-1} и σ_{i-2} является 1, ограничимся в дальнейшем рассмотрением рекурсий вида (I.I), где $S_1 = 1$. Переобозначим тогда S_2 через u_1 (см. теорему 3.I).

2. Вспомогательные функции

Предварительно введем функции β и γ, которые в третьей главе будут играть важную роль. Наглядно функцию β можно описать следующей процедурой. Для нахождения значения $\beta(m,k,j,t)$ (m,k,j,t – целые числа, где $1 \le m$, $0 \le k \le m$, $1 \le j \le \binom{m}{k}$, $1 \le t \le m$) запишем j-ое сочетание среди всех сочетаний k элементов из m, причем сочетания должны быть упорядочены способом, указанным ниже для случая $m=5$, $k=2$. Если при этом на нашем рисунке на t-ом месте j-ого сочетания стоит знак $\circ$, то полагаем $\beta(m,k,j,t)=2$, в противном случае $\beta(m,k,j,t)=1$.

Пример:



$\beta(5,2,7,2)=1$, а $\beta(5,2,3,2)=2$.

Такое наглядное описание функции β, конечно, имеет только вспомогательный характер. Сейчас дадим строгое определение этой функции ($m \ge 1$, $k,j,t \ge 0$):

$$(2.I)\quad \beta(m,k,j,t)=\begin{cases}1, & \text{если } k=0\\ \beta(m-1,k-1,j,t), & \text{если } k>0,\ j\le\binom{m-1}{k-1},\ t\neq m\\ 2, & \text{если } k>0,\ j\le\binom{m-1}{k-1},\ t=m\\ \beta(m-1,k,j-\binom{m-1}{k-1},t), & \text{если } k>0,\ j>\binom{m-1}{k-1},\ t\neq m\\ 1, & \text{если } k>0,\ j>\binom{m-1}{k-1},\ t=m.\end{cases}$$

Простой индукцией по m доказывается, что, по крайней мере, для всех m, k, j, t с $0\le k\le m$, $1\le j\le\binom{m}{k}$, $1\le t\le m$ – (2.I) дает точно одно значение $\beta(m,k,j,t)$.

Указанное выше наглядное представление функции β удовлетворяет определению (2.I) для $0\le k\le m$, $1\le j\le\binom{m}{k}$, $1\le t\le m$.

С помощью функции β введем новую функцию γ :

$$(2.2)\quad \gamma(m,k,j,t)=\sum_{\tau=1}^{t}\beta(m,k,j,\tau).$$

Справедливы следующие отношения:

$$(2.3)\quad \beta(1,0,1,1)=1,$$

$$(2.4)\quad \beta(1,1,1,1)=2,$$

$$(2.5)\quad \gamma(m,k,j,m)=m+k,\quad \text{если}\quad 0\le k\le m,\ 1\le j\le\binom{m}{k}.$$

(2.3) и (2.4) видны из (2.I). (2.5) легко проверяется для $m=1$, $k=0,1$ и для произвольного m и $k=0$. Для произвольного m и $k>0$ (2.5) доказывается индукцией по m, причем надо выделить случаи $1\le j\le\binom{m-1}{k-1}$ и $\binom{m-1}{k-1}<j\le\binom{m}{k}$ и, соответственно, использовать вторую и третью, либо четвертую и пятую строки в (2.I). Подробности опускаем.

В этой работе договоримся пользоваться следующими соотношениями:

$$(2.6)\quad \binom{0}{0}=1$$

$$(2.7)\quad \binom{n}{k}=0 \text{ для } k<0,$$

(2.8) $\prod_{t=q}^{p} c_t = 1$, если $q > p$.

Кроме того, часто будем ставить номера используемых соотношений над знаком равенства, справедливого благодаря этим соотношениям, например,

$$\beta(1,0,1,1) \overset{(2.1)}{=} 1 .$$

3. Явное описание величин S_i

Введем сокращенную запись

(3.1) $$(u,v)_q^p = \begin{cases} u_q & \text{, если } p=1 \\ v_q & \text{, если } p=2 , \end{cases}$$

с помощью которой формулируем следующую теорему.

Теорема 3.1: Пусть величины $S_i (i \geq 1)$ определяются рекурсией:

(3.3) $$S_1 = 1 ,$$
$$S_2 = u_1 ,$$
$$S_{i+1} = u_i S_i + v_i S_{i-1} \qquad (i \geq 2),$$

тогда

(3.4) $$S_i = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \binom{i-k-1}{k} \sum_{j=1}^{i-k-1} \prod_{t=1}^{i-k-1} (u,v)_{\gamma(i-k-1,k,j,t)}^{\beta(i-k-1,k,j,t)} \qquad (i \geq 1) .$$

Доказательство:

$$i=1: \quad S_1 = \prod_{t=1}^{0} (u,v)_{\gamma(0,0,1,t)}^{\beta(0,0,1,t)} \overset{(2.6),(2.8)}{=} 1 .$$

$$i=2: \quad S_2 = \prod_{t=1}^{1} (u,v)_{\gamma(1,0,1,t)}^{\beta(1,0,1,t)} \overset{(2.5)}{=} u_1 .$$

Далее мы докажем, что для $i \geq 2$ величины S_{i+1}, S_i, S_{i-1}, определенные формулой (3.4), удовлетворяют (3.3).

Используя следующую сокращенную запись:

(3.5) $$P_{m,k,j} = \prod_{t=1}^{m} (u,v)_{\gamma(m,k,j,t)}^{\beta(m,k,j,t)} ,$$

установим два равенства (3.6) и (3.10) для величин $P_{m,k,j}$.

(3.6) $$u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} = P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}} ,$$ если $2 \le i$, $0 \le k \le \left[\frac{i+1}{2}\right]-1$, $1 \le j \le \binom{i-k-1}{k}$.

Сначала докажем (3.6) для $k=0$. В этом случае $j=1$

$$u_i \cdot P_{i-1,0,1} = u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-1} (u,v)_{\gamma(i-1,0,1,t)}^{\beta(i-1,0,1,t)} \overset{(2.1)}{=} u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-1} u_t = \prod_{t=1}^{i} u_t ,$$

и также

$$P_{i-0,0,1+0} = \prod_{t=1}^{i} (u,v)_{\gamma(i,0,1,t)}^{\beta(i,0,1,t)} = \prod_{t=1}^{i} u_t .$$

При $k>0$ справедливы следующие равенства:

(3.7) $$(u,v)_{\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)}^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)} \overset{(2.1),(2.5)}{=} u_i$$

(принимая во внимание, что $1 \le j \Rightarrow j+\binom{i-k-1}{k-1} > \binom{i-k-1}{k-1}$,

$0 \le k \le \left[\frac{i+1}{2}\right]-1 \Rightarrow k \le i-k$, и

$1 \le j \le \binom{i-k-1}{k} \Rightarrow 1 \le j+\binom{i-k-1}{k-1} \le \binom{i-k}{k}$).

(3.8) $$\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t) \overset{(2.1)}{=} \beta(i-k-1,k,j,t)$$ для $1 \le t < i-k$.

и

(3.9) $$\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t) = \gamma(i-k-1,k,j,t)$$ для $1 \le t < i-k$.

Теперь

$$P_{i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1}} = \left(\prod_{t=1}^{i-k-1} (u,v)_{\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t)}^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},t)}\right) \cdot (u,v)_{\gamma(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)}^{\beta(i-k,k,j+\binom{i-k-1}{k-1},i-k)} =$$

$$\overset{(3.7),(3.8),(3.9)}{=} u_i \cdot \prod_{t=1}^{i-k-1} (u,v)_{\gamma(i-k-1,k,j,t)}^{\beta(i-k-1,k,j,t)} = u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} .$$

т.е. (3.6) доказано.

(3.10) $V_i \cdot P_{i-k-2,k,j} = P_{i-k-1,k+1,j}$, если $2 \le i$, $0 \le k \le [\frac{i}{2}]-1$, $1 \le j \le \binom{i-k-2}{k}$.

Для доказательства равенства (3.10) сначала заметим, что

(3.11) $(u,v)^{\beta(i-k-1,k+1,j,i-k-1)}_{\gamma(i-k-1,k+1,j,i-k-1)} \overset{(2.1),(2.5)}{=} V_i$,

(используя $j \le \binom{i-k-2}{k}$,
$k \le [\frac{i}{2}]-1 \Rightarrow k+1 \le i-k-1$, и
$1 \le j \le \binom{i-k-2}{k} \Rightarrow 1 \le j \le \binom{i-k-1}{k+1}$),

(3.12) $\beta(i-k-1,k+1,j,t) \overset{(2.1)}{=} \beta(i-k-2,k,j,t)$ для $-1 \le t < i-k-1$, и

(3.13) $\gamma(i-k-1,k+1,j,t) = \gamma(i-k-2,k,j,t)$ для $1 \le t \le i-k-1$.

Теперь

$$P_{i-k-1,k+1,j} = \left(\prod_{t=1}^{i-k-2} (u,v)^{\beta(i-k-1,k+1,j,t)}_{\gamma(i-k-1,k+1,j,t)} \right) \cdot (u,v)^{\beta(i-k-1,k+1,j,i-k-1)}_{\gamma(i-k-1,k+1,j,i-k-1)} =$$

$$\overset{(3.11),(3.12),(3.13)}{=} V_i \cdot \prod_{t=1}^{i-k-2} (u,v)^{\beta(i-k-2,k,j,t)}_{\gamma(i-k-2,k,j,t)} = V_i \cdot P_{i-k-2,k,j},$$

т.е. (3.10) тоже доказано.

Итак, можем теперь вычислять

$$u_i S_i + v_i S_{i-1} = \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} u_i \cdot P_{i-k-1,k,j} + \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-2}{k}} V_i \cdot P_{i-k-2,k,j} =$$

$$\overset{(3.6),(3.10)}{=} \sum_{k=0}^{[\frac{i+1}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} P_{i-k,k,j} + \binom{i-k-1}{k-1} + \sum_{k=0}^{[\frac{i}{2}]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-2}{k}} P_{i-k-1,k+1,j} = Y.$$

Выделим два случая

a) $i = 2n$ ($n \geq 1$). При этом

$$\left[\frac{i+1}{2}\right] = \left[\frac{i}{2}\right] = \left[\frac{i+1}{2}\right] - 1 = n \quad \text{и} \quad \binom{i-\left[\frac{i}{2}\right]-1}{\left[\frac{i}{2}\right]-1} = \binom{i-\left[\frac{i}{2}\right]}{\left[\frac{i}{2}\right]} = 1.$$

Итак, $$Y = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]-1} \sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}+\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]-1} \left(\sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} \right) + \sum_{j=1+0}^{\binom{i-1}{0}+0} P_{i-0,0,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-\left[\frac{i}{2}\right]-1}{\left[\frac{i}{2}\right]-1}} P_{i-\left[\frac{i}{2}\right],\left[\frac{i}{2}\right],j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-0}{0}} P_{i-0,0,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-\left[\frac{i}{2}\right]}{\left[\frac{i}{2}\right]}} P_{i-\left[\frac{i}{2}\right],\left[\frac{i}{2}\right],j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+2}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} = S_{i+1},$$

b) $i = 2n+1$ ($n \geq 1$). В этом случае $\left[\frac{i+1}{2}\right] - 1 = \left[\frac{i}{2}\right] = \left[\frac{i+2}{2}\right] - 1$,

$$Y = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}+\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \left(\sum_{j=1+\binom{i-k-1}{k-1}}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k-1}} P_{i-k,k,j} \right) + \sum_{j=1+0}^{\binom{i-1}{0}+0} P_{i-0,0,j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} + \sum_{j=1}^{\binom{i-0}{0}} P_{i-0,0,j} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i}{2}\right]} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+2}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k}{k}} P_{i-k,k,j} = S_{i+1}.$$

На этом теорема 3.I доказана.

4. Примечания

Приведем два примера использования представления (3.4).

Пример I: Числа Фибоначчи.

Числа Фибоначчи F_i ($i \geq 1$) определены рекурсией

(4.I) $\quad F_1 = F_2 = 1$

$$F_{i+1} = F_i + F_{i-1} \quad \text{(для } i \geq 2\text{)}.$$

Подставляя $u_1 = u_i = v_i = 1$ ($i \geq 2$) в (3.4), получаем известное выражение для i -ого числа Фибоначчи (см., например [2], стр. 13):

(4.2) $$F_i = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \binom{i-k-1}{k}.$$

Именно:

$$F_i = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} \prod_{t=1}^{i-k-1} 1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} 1 = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \binom{i-k-1}{k}.$$

Пример 2: Определитель трехдиагональных матриц.

Пусть

(4.3) $$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_2 & & & \\ a_2 & b_2 & c_3 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_i \\ & 0 & & a_i & b_i \end{pmatrix}$$

– трехдиагональная матрица. Ее определитель обозначим через $\det_{i+1}(a_2,\dots,a_i,b_1,\dots,b_i,c_2,\dots,c_i)$. Разлагая определитель по последней строке и минор, принадлежащий a_i, по последнему столбцу, получаем:

(4.4) $$\det_{i+1}(a_2,\dots,a_i,b_1,\dots,b_i,c_2,\dots,c_i) =$$
$$= b_i \det_i(a_2,\dots,a_{i-1},b_1,\dots,b_{i-1},c_2,\dots,c_{i-1}) -$$
$$- a_i c_i \det_{i-1}(a_2,\dots,a_{i-2},b_1,\dots,b_{i-2},c_2,\dots,c_{i-2}).$$

Знаем, что

(4.5) $$\det_2(b_1) = b_1.$$

Кроме того, полагаем

(4.6) $$\det_1 = 1.$$

Таким образом, (4.4), (4.5) и (4.6) дают рекурсию вида (3.3) для вычисления $\det_{i+1}(a_2,\dots,a_i,b_1,\dots,b_i,c_2,\dots,c_i)$, где теперь

$$u_i = b_i \quad (i \geq 1) \qquad \text{и} \qquad v_i = -a_i c_i \quad (i \geq 2).$$

Формула (3.4) дает аналитическое представление для $\det_i(a_2,\dots,a_{i-1},b_1,\dots,b_{i-1},c_2,\dots,c_{i-1})$:

(4.7) $$\det_i(a_2,\dots,a_{i-1},a_1,\dots,b_{i-1},c_2,\dots,c_{i-1}) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{i+1}{2}\right]-1} \sum_{j=1}^{\binom{i-k-1}{k}} \prod_{t=1}^{i-k-1} (b,a_c)_{\gamma(i-k-1,k,j,t)}^{\beta(i-k-1,k,j,t)} \qquad (i\geq 1),$$

где

(4.8) $$(b,a_c)_q^p = \begin{cases} b_1 & , \text{если } p=1 \\ -a_q c_1 & , \text{если } p=2. \end{cases}$$

Этими определителями можно, например, выразить элементы обратной матрицы A^{-1} (см./I/), так что отношение (4.7) позволяет и явное представление для обратной матрицы A^{-1}.

Проблема возникла в ходе общей работы с Г.Емельяненко/I/. В.Душский (Москва) и Г.Ососков (Дубна) дали ценные советы. В.Галактионов просмотрел русский текст работы. Им всем я выражаю глубокую благодарность.

ЛИТЕРАТУРА

I . Б.Бухбергер, Г.А.Емельяненко.
Препринт ОИЯИ, Р11-5686, Дубна, 1971.

2 . Н.Н.Воробьев. Числа Фибоначчи. Изд. "Наука", М., 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 мая 1971 года.