Die Wärmeleitungsgleichung

In einem Stab der Länge 1 wird die Temperaturverteilung gegeben durch die Funktion $u : ([0,1] \times [0,\infty)) \to \mathbb{R}$, $u(x,t)$ ist die Temperatur am Punkt x zum Zeitpunkt t. Die Funktion erfüllt die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

und die Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für alle $t \geq 0$, und $u(x,0) = f(x)$ ist eine gegebene Anfangsverteilung, die natürlich $f(0) = f(1) = 0$ erfüllen muß.

Ansatz

Da die Gleichung und die Randbedingungen linear sind, reicht es, eine Basis für den Lösungsraum zu erraten. Wir setzen an $u(x,t) = a(x)b(t)$, $a(0) = a(1) = 0$ und erhalten

$$a''(x) - ca(x) = b'(t) - cb(t) = 0 \text{ für ein } c \in \mathbb{R}.$$

Die erste Gleichung hat genau dann eine Lösung mit Randbedingung $a(0) = a(1) = 0$, wenn $c = -n^2\pi$ für $n \in \mathbb{N}$ ist, nämlich $a(x) = \sin(n\pi x)$. Daher ist

$$u_n(x,t) = \sin(n\pi x)e^{-n^2\pi t}$$

eine Lösung für jedes $n \in \mathbb{N}$. Das gibt bereits einen großen Lösungsraum.

Lösung

Das ursprüngliche Problem ist gelöst, wenn es gelingt, die Anfangsverteilung darzustellen als

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)$$

darzustellen. Fourier behauptet: das ist immer möglich. Er gibt die Formel an:

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)dx$$

Lineare Algebra

Es sei X ein Vektorraum von Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ die am Rand verschwinden, der die Funktionen $s_n : x \to \sin(n\pi x)$ enthält. Wir definieren auf X ein Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\pi f(x)g(x)dx.$$

Es ist bilinear, symmetrisch, und positiv semidefinit. Um es positiv definit zu machen, ist es notwendig, modulo Funktionen zu rechnen, die fast überall Null sind. Der Vektorraum aller quadratisch integrierbarer Funktionen modulo fast überall verschwindenden Funktionen heißt $L^2([0,1])$.

Gruppenarbeit

Man berechne $\langle s_m, s_n \rangle$. Hinweis: Man verwende die Formel

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2}.$$

Man nehme an, daß $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n s_n(x)$ gilt. Man zeige die Fourier-Formel für a_n.

Fakten zur Fourier-Entwicklung

Falls f eine Funktion mit beschränkter Schwankung ist, konvergiert die Fourier-Entwicklung nach der Fourier-Formel für jeden Punkt.

Falls die Funktion beschränkte Schwankung hat und stetig ist, stimmt die Fourier-Entwicklung mit der Funktion überein.

Beispiel

Die Anfangsverteilung sei $f(x) = 1$ für $0 < x < 1$, $f(0) = f(1) = 0$. Siehe Maple Graphik.

Die Fourier-Entwicklung ist eine Zerlegung in Anteile verschiedener Frequenzen.

Periodische Funktionen

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Periode 1, d.h. $f(x+1) = f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$. Hier kann in jeder Frequenz eine Phasenverschiebung auftreten, diese läßt sich durch Linearkombination von $\sin$- und $\cos$-Funktionen ausdrücken. Für die Koeffizienten der Fourier-Entwicklung

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n x)$$

gilt die Formel

$$a_0 = \int_0^1 f(x) dx, a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos(2\pi n x) dx, b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(2\pi n x) dx$$

Formulierung mit komplexen Zahlen

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit Periode 2π. Für die Koeffizienten der Fourier-Entwicklung

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-2\pi i n x}$$

(für $n > 0$ entspricht c_n dem halben Wert von $a_n + i b_n$ oben; für reelle Funktionen gilt $c_{-n} = c_n$) gilt die Formel

$$a_n = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i n x} dx.$$

Die Fourier-Transformation

Für Funktionen ohne Periode ist es möglich, sich diese als Überlagerung von Funktionen der Art $x \to e^{2\pi itx}$ sich vorzustellen:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-2\pi itx} dt$$

Dann mißt $g(t)$ die Amplitude und Phasenverschiebung des Anteils von e^{itx}. Dieser Wert kann berechnet werden durch

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{2\pi itx} dt$$

Die Transformation ist sinnvoll für $f \in L^2(\mathbb{R})$, dann ist auch $g \in L^2(\mathbb{R})$. Wir schreiben $g = F(f)$ und $f = F^{-1}(g)$.

Fourier-Transformation und Ableitung

Es gilt die Regel

$$F(f')(t) = 2\pi i F(f)(t)$$

Damit lassen sich manche Differentialgleichungen zurückführen auf das Lösen einer linearen Gleichung. Die Lösung muß allerdings auch wieder zurücktransformiert werden.

Faltung

Die Faltung von zwei Funktionen f, g ist definiert durch

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

Es gilt die Regel

$$F(f * g)(t) = F(f)(t)F(g)(t)$$

Schnelle Multiplikation

Für die diskrete Fourier-Transformation (für periodische Funktionen hatten wir eine halbe Diskretisierung) und dessen Inverse existieren schnelle Algorithmen, mit asymptotischer Laufzeit von $\mathcal{O}(n \log n)$ Operationen.

Die diskrete Faltung entspricht der Multiplikation von Polynomen in einer Variablen. Multiplikation von Polynomen kann aufwendig sein, es scheint daß man n^2 Multiplikationen durchführen muß (wobei n der Grad ist).

Durch diskrete Fourier-Transformation kann man aber die Multiplikation der Polynome auf die Multiplikation von Koeffizienten mit jeweils gleichem Index zurückführen, das sind nur n Multiplikationen.

Wenn man für die Variable in den Polynomen zum Beispiel 10 einsetzt, hat man ein Verfahren für schnelle Multiplikation im Dezimalsystem!