Überblick

1. Die Schwingungsgleichung
2. Lineare DG mit konstanten Koeffizienten
3. Lineare Systeme von DGen
4. Lineare DG mit variablen Koeffizienten
5. Trennung der Variablen
6. Euler-Gleichung

7. Das Anfangswertproblem
8. Der Banachsche Fixpunktsatz
9. Punktweise und gleichförmige Konvergenz
10. Der Satz von Picard und Lindelöf

Überblick

11. Equilibrien
12. Der Satz von Hartman/Grobman
13. Die Volterra-Lotka-Gleichung
14. Liapunov-Funktionen
15. Die Van der Pol-Gleichung
16. Seltsame Attraktoren
17. Variationsrechnung

18. Die Wellengleichung
19. Kugelförmige Wellen

Die Schwingungsgleichung

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x), \tag{1}$$

wobei $a \geq 0$ und $b > 0$ reelle Parameter sind und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist. Die Wurzel aus b heißt auch Eigenfrequenz oder Kreisfrequenz, und a heißt auch Dämpfung.

Die Gleichung beschreibt die Schwingung eines Pendels (für kleine Winkel), einer Feder, oder eines elektrischen Schwingkreises.

Falls $f = 0$ ist, spricht man von einer freien Schwingung, sonst von einer erzwungenen oder angeregten Schwingung.

Linearität

Satz L1. Die freien Schwingungen bilden einen Vektorraum (abgeschlossen unter Addition und Skalarmultiplikation).

Satz L2. Die Dimension des Vektorraums ist 2.

Satz L3. Die allgemeine erzwungene Schwingung läßt sich schreiben als Summe einer speziellen erzwungenen Schwingung und der allgemeinen freien Schwingung.

Das charakteristische Polynom

Das Polynom $P(T) = T^2 + aT + b$ heißt charakteristisches Polynom der Gleichung (1). Das Lösungsverhalten der freien Schwingung hängt von der Anzahl der Nullstellen von $P(T)$C ab.

Zwei reelle Nullstellen oder eine doppelte reelle Nullstelle: Die Lösung schneidet die x-Achse höchstens einmal.

Komplexe Nullstellen: Unendlich viele Schnittpunkte in konstantem Abstand.

Falls die Nullstellen negativen Realteil haben, gehen alle Lösungen asymptotisch gegen Null.

Angeregte Schwingungen

Wir nehmen an, die rechte Seite von (1) eine Sinus-Schwingung ist:

$$f(x) = \sin(\omega x)$$

Im allgemeinen läßt sich eine spezielle Lösung der gleichen Form

$$y_0(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

finden durch einsetzen und lösen eines linearen Gleichungssystems.

Übung 1

Man setze $a = 0, b = 1$, und untersuche die spezielle Lösung in Abhängigkeit von ω, insbesondere deren Amplitude $\sqrt{A^2 + B^2}$.

Resonanz

Das Verfahren versagt wenn $a = 0$ und $b = \omega^2$. Hier setzt man an

$$y_0(x) = Ax\cos(\omega x) + Bx\sin(\omega x)$$

Die lineare DG mit konstanten Koeffizienten

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oder $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sodaß

$$y^{(n)}(x) + a_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1} y'(x) + a_n y(x) = 0 \qquad (2)$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ reelle bzw. komplexe Parameter sind.

Die Sätze L1, L2 abgewandelt, und L3 gelten.

Das Polynom

$$P(T) = T^n + a_1 T^{n-1} + \cdots + a_{n-1} T + a_n$$

heißt charakteristisches Polynom der Gleichung (2).

Die allgemeine Lösung

Satz. Es seien $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ die Nullstellen vom charakteristischen Polynom P. Es seien $m_1, \dots, m_r$ die Vielfachheiten, $m_1 + \dots + m_r$ die Vielfachheiten. Dann sind die Funktionen

$$y_{i,j} : x \mapsto x^j e^{\alpha_i x},\ i = 1, \dots, r; j = 0, \dots, m_i$$

eine Basis des Vektorraums der Lösungen.

Falls die Koeffizienten von P reell sind, läßt sich auch eine Basis von reellen Funktionen finden.

Erklärung Resonanz

Wir untersuchen die Schwingungsgleichung (1) für $f(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$.

Die rechte Seite ist dann Lösung der freien Schwingungsgleichung

$$z''(x) + \omega^2 z(x) = 0.$$

Erklärung Resonanz

Wir wenden den Operator $g \mapsto g'' + \omega^2 g$ auf beide Seiten der Gleichung an und erhalten

$$y'''' + ay''' + by'' + \omega^2 y'' + \omega^2 ay' + \omega^2 by = 0 \tag{3}$$

Jede Lösung von (1) ist auch Lösung der Gleichung (3) (aber nicht umgekehrt).

Der Resonanzfall tritt genau dann ein, wenn das charakteristische Polynom von (3) doppelte Nullstellen besitzt.

Systeme von linearen DGen

Gesucht ist eine vektorwertige Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, sodaß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\vec{y}'(x) = M\vec{y}(x), \tag{4}$$

wobei $M \in \mathrm{M}(n, n, \mathbb{R})$.

Dabei reicht es, Systeme von erster Ordnung zu betrachten.

Rückführung

Die Differentialgleichung (2) ist equivalent zum System (4) mit Matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Potenzreihenansatz

Satz. Die allgemeine Lösung lautet

$$\vec{y}(x) = \vec{y_0} + xM\vec{y_0} + \frac{x^2}{2!}M^2\vec{y_0} + \frac{x^3}{3!}M^3\vec{y_0} + \cdots = e^{xM}\vec{y_0}$$

Beim Beweis geht natürlich die Annahme ein, daß die Lösung in eine Potenzreihe entwickelbar ist (Analytizität).

(Es folgt der Beweis von Satz L2.)

Übung 2

Man berechne e^{xM} für folgende Matrizen:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnung der Exponentiation

Proposition. Es sei T invertierbar. Dann ist $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^{A}T$.

Satz (JNF). Für jede Matrix A existiert eine Jordansche Normalform J und eine invertierbare Matrix T sodaß $A = T^{-1}JT$.

Jordansche Normalformen

Die komplexen Jordansche Normalformen sehen so aus:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & J_k \end{bmatrix}, J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Im reellen Fall können statt λ_i auch 2×2-Matrizen der Form $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ stehen.

Beispiele

Die Jordanschen Normalformen für 2-dimensionale Matrizen sind

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Wir verwenden das Programm `vector` zur Darstellung der Lösungskurven, das von `http://www.falstad.com` heruntergeladen werden kann. Wann liegt eine Quelle/Senke vor?

Richtungsfelder in der Ebene

Ein Richtungsfeld in der Ebene ist eine stetige Funktion $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Zum Richtungsfeld R gehört die vektorwertige Differentialgleichung

$$x'(t) = u(x(t), y(t)), y'(t) = v(x(t), y(t)).$$

Vorläufig betrachten wir nur lineare Richtungsfelder, d.h. R ist durch eine Matrix gegeben.

Gradient und Potentialfunktion

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann existiert das Gradientenfeld

$$\mathrm{grad}(f) : (x, y) \mapsto (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y))$$

Die Funktion von f heißt dann auch Potentialfunktion für das Richtungsfeld $R = \mathrm{grad}(f)$.

Divergenz

Es sei $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ein differenzierbares Richtungsfeld. Dann heißt die Funktion

$$\operatorname{div}(R) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (\partial_x u(x, y) + \partial_y v(x, y))$$

die Divergenz von R.

Rotation

Es sei $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ ein differenzierbares Richtungsfeld. Dann heißt die Funktion

$$\mathrm{rot}(R) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (\partial_x v(x, y) - \partial_y u(x, y))$$

die Rotation von R.

Gradientenfelder haben stets Rotation Null.

Richtungsfelder im Raum

Ein Richtungsfeld im Raum ist eine stetige Funktion $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$. Zum Richtungsfeld R gehört die wieder eine vektorwertige Differentialgleichung, analog wie in der Ebene. Vorläufig betrachten wir wieder nur lineare Richtungsfelder, d.h. R ist durch eine 3×3 Matrix gegeben.

Gradient und Divergenz sind analog wie in der Ebene definiert.

Rotation

Es sei $R : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$ ein differenzierbares Richtungsfeld. Dann heißt das Richtungsfeld

$$\mathrm{rot}(R) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto$$

$$(\partial_y w - \partial_z v, \partial_z u - \partial_x w, \partial_x v - \partial_y u)(x,y,z)$$

die Rotation von R, englisch $\mathrm{curl}(R)$.

Gradientenfelder haben stets Rotation Null.

Übung 3

Man untersuche die folgenden Richtungsfelder mit dem Programm `vector`:

$$(x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$$
$$(x, y) \mapsto (\tfrac{1}{10}x + y, -x + \tfrac{1}{10}y)$$
$$(x, y) \mapsto (x, x + y)$$

Wie ist das Verhalten der Lösungen für $t \to \infty$ oder $t \to -\infty$?

Die lineare DG mit variablen Koeffizienten

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$y'(x) - f(x)y(x) = g(x), \tag{5}$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegebene stetige Funktionen sind.

Wieder gelten die Linearitäts-Sätze L1, L2 (Dimension 1), L3.

Lösung des homogenen Falls

Im Fall $g = 0$ setzen wir $y(x) = e^{z(x)}$ und suchen nun die Funktion z. Durch Einsetzen erhält man die DG

$$z'(x) - f(x) = 0,$$

und die allgemeine Lösung ist

$$z(x) = \int f(x)dx + C.$$

Beispiel

$$y'(x) = xy(x)$$

Ansatz $y(x) = e^{z(x)}$ führt zur Gleichung

$$z'(x) = x$$

mit allgemeiner Lösung

$$z(x) = \frac{x^2}{2} + C,\ \ y(x) = C'e^{\frac{x^2}{2}}$$

Variantes

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$y'(x) - f(x)y(x)^2 = 0, \tag{6}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist.

Ansatz: $y(x) = z(x)^{-1}$.

Variants

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$y'(x) - f(x)y(x)^n = 0, \tag{7}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist und $n \in \mathbb{Z}$.

Trennung der Variablen

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$y'(x) - f(x)g(y(x)) = 0, \tag{8}$$

wobei $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen sind.

Umformung:

$$\frac{1}{g(y(x))} y'(x) = f(x)$$

Trennung der Variablen

Wir berechnen eine Stammfunktion G von $u \mapsto \frac{1}{g(u)}$ und können nun mit der Kettenregel schreiben

$$(G \circ y)'(x) = G'(y(x))y'(x) = \frac{1}{g(y(x))}y'(x) = f(x).$$

Also ist $G \circ y$ eine Stammfunktion F von $f(x)$, die wir berechnen können, plus eine Konstante C. Nun hoffen wir daß G invertierbar ist und bekommen

$$G(y(x)) = F(x) + C \Rightarrow y(x) = G^{-1}(F(x) + C).$$

Bequemere Schreibweise (nicht ganz sauber)

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$
$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C$$
$$y = G^{-1}(F(x) + C)$$

Beispiel

$$y'(x) = \frac{\sin x}{\sin(y(x))}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\sin y}$$
$$\sin y \; dy = \sin x \; dx$$
$$-\cos y = -\cos x + C$$
$$y = -\arccos(-\cos x + C)$$

Übung 4

Bestimme die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$$

$$y'(x) = e^{x+y(x)}$$

Lösung des inhomogenen Falls

Wir gehen zurück zur linearen Gleichung $y'(x) - f(x)y(x) = g(x)$, wobei f, g gegebene stetige Funktionen sind.

Es sei y_0 eine spezielle Lösung der homogenen Gleichung. Wir setzen $y(x) = y_0(x)z(x)$ und suchen nun die Funktion z. Durch Einsetzen erhält man die DG

$$y_0(x)z'(x) = g(x)$$

und die allgemeine Lösung ist

$$z(x) = \int \frac{g(x)}{y_0'(x)} dx + C.$$

Beispiel

$$y'(x) = xy(x) + x$$

Ansatz $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}} z(x)$ führt zur Gleichung

$$z'(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$$

mit allgemeiner Lösung

$$z(x) = -e^{\frac{-x^2}{2}} + C,\ y(x) = -1 + Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Die Euler-homogene Differentialgleichung

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right), \tag{9}$$

wobei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist.

Hier führt der Ansatz $y(x) = xz(x)$ zur Gleichung

$$z'(x)x = f(z(x)) - z(x),$$

bei der die Variablen getrennt werden können.

Beispiel

$$y'(x) = 1 - \frac{y(x)}{x} + \frac{y(x)^2}{x^2}$$

Der Ansatz $y(x) = xz(x)$ führt zu

$$z'(x)x = 1 - 2z(x) + z(x)^2 = (1 - z(x))^2$$

$$\frac{dz}{(1-z)^2} = \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{1-z} = \ln x + C, z = 1 - \frac{1}{\ln x + C}, \;\; y = x - \frac{x}{\ln x + C}$$

Übung 5

Bestimme die Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

$$y'(x) = \frac{y(x)^2}{x^2}$$

$$y'(x) = \frac{y(x)^2}{x^2} + \frac{y(x)}{x}$$

Das Anfangswertproblem

Gesucht ist eine Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodaß für alle x

$$\forall x : y'(x) = F(x, y(x)),\ \ y(x_0) = y_0 \tag{10}$$

wobei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine gegebene stetige Funktion ist und x_0, y_0 gegebene reelle Zahlen sind.

Existiert eine Lösung? Gibt es vielleicht mehrere Lösungen?

Auffrischung Analysis

Ein metrischer Raum ist eine Menge X mit einer Metrik $d : X^2 \to \mathbb{R}$, sodaß

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y,\ d(x,y) = d(y,x),\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

Eine Folge $(x_n)_n$ in X heißt Cauchy-Folge wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein N gibt sodaß

$$m,n > N \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon$$

Ein metrischer Raum heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge einen Grenzwert besitzt.

Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz. Es sei X ein vollständiger metrischer Raum. Es sei $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. für alle $x, y \in X$ gilt

$$d(f(x), f(y)) \leq M d(x, y) \text{ für ein festes } M, 0 < M < 1.$$

Dann besitzt die Gleichung $f(x) = x$ eine eindeutige Lösung.

Punktweise und gleichförmige Konvergenz

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir bezeichnen mit $F := C^0(D)$ die Menge aller stetigen Funktionen von D nach $\mathbb{R}$. Es sei $(f_n)_n$ eine Folge in F und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

f heißt punktweiser Grenzwert von $(f_n)_n$ wenn

$$\forall \epsilon \forall x \exists N (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

f heißt gleichmäßiger Grenzwert von $(f_n)_n$ wenn

$$\forall \epsilon \exists N \forall x (n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)$$

Punktweise und gleichmäßige Konvergenz

Selbverständlichkeiten: Ein gleichmäßiger Grenzwert ist auch ein punktweiser Grenzwert; es gibt höchstens einen punktweisen Grenzwert.

Beispiel $D = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$: besitzt einen punktweisen Grenzwert, der aber nicht gleichmäßig ist.

Geschichtliche Abschweifung

Vermutung: Der Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen ist wieder stetig.

Der erste strenge Beweis wurde 1821 von Cauchy gegeben. In diesem wird der Begriff Stetigkeit präzis definiert.

Geschichtliche Abschweifung

Gegenbeispiele: Abel 1826, Fourier 1822

Abels Antwort: Der Gültigkeitsbereich der Sätze der Analysis im allgemeinen, insbesondere des Satzes über die Stetigkeit der Grenzfunktion, beschränkt sich auf die Potenzreihen.

Geschichtliche Abschweifung

Spätere Mathematikhistoriker nahmen oft an, daß derjenige, der ein Gegenbeispiel entdeckt, automatisch den Fehler im Beweis entdeckt hat und diesen somit verbessern kann. So wurde Abel die Entdeckung der gleichmäßigen Konvergenz zugeschrieben (Pringsheim 1916, Hardy 1918, Bourbaki 1949).

Quelle: Anhang von Worall/Zahar zu: I. Lakatos, Beweise und Widerlegungen

Übung 6

Ist es sinnvoll, den Cauchy-schen Begriff der Stetigkeit von Funktionen in der Schule durchzunehmen? Formulieren und Begründen Sie eine These (schriftliche Diskussionsvorbereitung).

Eine Metrik auf F

Wenn D kompakt ist, dann ist mit

$$d(f,g) := \max_{x \in D} |f(x) - g(x)|$$

eine Metrik auf $F = C^0(D)$ gegeben.

Satz. Mit dieser Metrik ist F vollständig. Die Grenzwerte in dieser Metrik sind genau die gleichmäßigen Grenzwerte.

Das AWP als Fixpunktproblem

Es sei $D := [a, b]$. Wir ändern (10) dahingehend ab, daß $y : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, und $F : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}$ ist.

Es sei $T : C^0(D) \to C^0(D)$,

$$h \mapsto \left[D \to \mathbb{R}, x \mapsto y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, h(t))dt \right].$$

Lemma. Die Lösungen der Differentialgleichung sind genau die Fixpunkte des Operators T.

Abschätzung der Operatornorm

Lemma. Angenommen, es gibt eine Konstante L, sodaß für alle $x \in D$, $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|.$$

Dann ist

$$d(Tf_1, Tf_2) < (b-a)Ld(f_1, f_2).$$

Insbesondere ist T kontrahierend falls $(b-a)L < 1$ ist.

Der Satz von Picard/Lindelöf

Es sei $F : D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die für eine Konstante L die "Lipschitz-Bedingung"

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < L|y_1 - y_2|$$

erfüllt. Dann besitzt das Anfangswertproblem (10) eine eindeutige Lösung.

Übung 7

Wie könnte man den Satz von Picard/Lindelöf im Fall $(b-a)L \geq 1$ beweisen? (Hinweis: man überlege, wie ein Gegenbeispiel des Satzes beschaffen sein müßte.)

Katastrophe in endlicher Zeit

Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^2$ erfüllt keine Lipschitzbedingung.

Das AWP

$$y'(x) = y(x)^2,\ y(0) = 1$$

besitzt keine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Spontane Entstehung aus dem Nichts

Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y^{1/2}$ erfüllt keine Lipschitzbedingung.

Das AWP

$$y'(x) = |y(x)|^{1/2}, \; y(0) = 1$$

besitzt mehrere Lösungen (wie viele?).

Der Satz von Picard-Lindelöf für Systeme

Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Es sei $F : D \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion. Es existiere eine Lipschitz-Konstante L, sodaß

$$||\mathbf{F}(x, \mathbf{y}_1) - \mathbf{F}(x, \mathbf{y}_2)|| \leq L||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||$$

. Dann hat das AWP

$$\mathbf{f}'(x) = \mathbf{F}(x, \mathbf{f}(\mathbf{y})), \mathbf{f}(0) = \mathbf{y}_0$$

eine eindeutige Lösung.

Autonome DGen

Es sei $n = 2$ oder $n = 3$. Gesucht sind n Funktionen $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodaß für alle t gilt

$$x_1'(t) = F_1(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \ldots, x_n'(t) = F_n(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \qquad (11)$$

wobei $F_1, \ldots, F_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind.

Rückführung

Die allgemeine gewöhnliche DG erster Ordnung $y'(x) = F(x, y(x))$ kann auf ein autonomes System

$$x' = 1, y' = F(x(t), y(t))$$

zurückgeführt werden.

Equilibrien

Ein Punkt $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt Equilibrium wenn

$$F_1(a_1, \ldots, a_n) = \cdots = F_n(a_1, \ldots, a_n) = 0.$$

Falls $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Equilibrium ist, so ist

$$x_i : t \mapsto a_i, \;\; i = 1, \ldots, n$$

eine Lösung von (11).

Verschiebung in den Nullpunkt

Es sei $(a_1, \ldots, a_n)$ ein Equilibrium von (11). Wir führen den Koordinatenwechsel $x_i(t) := y_i(t) + a_i$, $i = 1, \ldots, n$, durch. Dadurch wird das Equilibrium auf den Nullpunkt O verschoben.

Wir nehmen im folgenden an, daß diese Verschiebung schon passiert ist und bezeichnen die gesuchten Funktionen wieder mit $x_1, \ldots, x_n$. Dann hat das System (11) ein Equilibrium in O.

Lineare Approximation

Wir nehmen nun an daß das Richtungsfeld stetig differenzierbar ist und ersetzen in der rechten Seite die F_i durch deren Taylor-Entwicklungen erster Ordnung:

$$x_1'(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(O)x_1 + \ldots, \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(O)x_n,$$
$$\ldots,$$
$$x_n'(t) = \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(O)x_1 + \ldots, \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(O)x_n$$

oder $\vec{x}(t)' = J(O)\vec{x}(t)$, wobei $J = (\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j}$ die Jacobimatrix von F ist.

Der Satz von Hartman/Grobman

Definition. Ein Equilibrium der Differentialgleichung 11 heißt hyperbolisch wenn alle Eigenwerte der Jacobimatrix Realteil ungleich 0 haben.

Satz. Es sei O ein hyperbolisches Equilibrium der Differentialgleichung 11. Dann existiert offene Umgebungen U, V von O und ein Homöorphismus $T : U \to V$, sodaß

$$F(\vec{x}) = T^{-1}(J(O)T(\vec{x}))$$

für alle $\vec{x} \in U$.

Die Transformation T führt das System 11 in ein lineares System über.

Quellen und Senken

Jedes Equilibrium, bei denen die Eigenwerte der Jacobimatrix negativen Realteil haben, ist eine Senke: es existiert eine Umgebung U, sodaß jede Lösungskurve mit Anfangswert in U asymptotisch gegen O geht für $t \to \infty$.

Jedes Equilibrium, bei denen die Eigenwerte der Jacobimatrix positiven Realteil haben, ist eine Quelle: es existiert eine Umgebung U, sodaß jede Lösungskurve mit Anfangswert in U asymptotisch gegen O geht für $t \to -\infty$.

Stabile Gebiete

Ein Gebiet G heißt stabil, wenn jede Lösungskurve mit Anfangswert $(t = 0)$ auch für positives t in G bleibt.

Falls p eine Senke ist, nennen wir ein Gebiet G ein Einzugsgebiet der Senke falls das Gebiet stabil ist und jede Lösungskurve mit Anfangswert in G asymptotisch für $t \to \infty$ gegen p geht.

Übung 8

Erstellen Sie mit `vector` “Phasenbilder” für die Richtungsfelder

$$F(x,y) = (-x + x^2/2, -y + y^2/2),$$

$$F(x,y) = (-x + y^2/2, -y + x^2/2),$$
$$F(x,y) = (-x - y + x^2/2, -y + x),$$
$$F(x,y) = (-\sin(x)\cos(y), -\cos(x)\sin(y)) \text{(“pendulum potential”)}$$

und drucken Sie es aus. Falls eine Senke vorliegt, finden Sie durch “Hinschauen” ein Einzugsgebiet. Analog für Quellen.

Die Volterra-Lotka Gleichung

Das Richtungsfeld

$$F(x, y) = ((1 - y)x, \alpha(x - 1)y), \;\; \alpha > 0$$

modelliert die zeiliche Entwicklung eines Räuber-Beute-Systems. Im Bereich $x > 0$ und $y > 0$ ist $(1, 1)$ das einzige Equilibrium. Ist es hyperbolisch?

Der Nullpunkt $(0, 0)$ wäre auch ein Equilibrium, nämlich ein hyperbolischer Sattelpunkt (Eigenwerte der Jacobi-Matrix sind 1 und $-\alpha$).

Die Volterra-Lotka Gleichung

Hartman/Grobman ist keine Hilfe bei der Analyse des Equilibriums $(1, 1)$.

Wir untersuchen die Zeitentwicklung der Größe $W(x, y) = \alpha(x - \ln(x)) + y - \ln(y)$ entlang vonLösungskurven. Dazu verwende man die Kettenregel für die zusammengesetze Funktion

$$t \mapsto W(x(t), y(t)) = \alpha(x(t) - \ln(x(t))) + y(t) - \ln(y(t))$$

und die Differenzialgleichung

$$x'(t) = (1 - y(t))x(t), y'(t) = \alpha(x(t) - 1)y(t)).$$

Die Volterra-Lotka Gleichung

Die Funktion W ist konvex und besitzt im Gleichgewichtspunkt ein globales Minimum. Für x oder y gegen 0 oder $+\infty$ wächst W gegen ∞. Also sind die Höhenlinien geschlossene Kurven rund um den Gleichgewichtspunkt. Es folgt, daß alle Bahnen bis auf die konstante Bahn im Gleichgewichtspunkt periodisch sind.

Übung 9

Man berechne alle Senken des Richtungsfeldes

$$F(x,y) = (xy, x^2 + y^2 - 3)$$

und bestimme für jede Senke ein Einzugsgebiet.

Die Van der Pol Gleichung

Die Differentialgleichung mit Richtungsfeld

$$F(x,y) = (y, -x + y - x^2y/4)$$

hat nur einen Gleichgewichtspunkt O. Welchen Typ?

Analysis

Wir untersuchen die Funktion $L(x,y) = (x^2 + y^2)$. Es gilt (Abstand vom Gleichgewichtspunkt). Es gilt

$$\frac{dL(x(t),y(t))}{dt} = (4 - x(t)^2)y(t)^2,$$

also L wächst solange $|x| < 2$ ist, und sinkt für $|x| > 2$.

Bei Punkten (x,y) mit $L(x,y) < 4$ ist immer $|x| < 2$, daher wächst L dort immer. Es folgt daß jede Bahn außer die konstante Bahn bei 0 die Kreisscheibe $L(x,y) < 4$ verläßt und nie wieder hineinkommt.

Analysis

Wir zeichnen die Richtungen entlang der Achsen.

Wenn eine Bahn den Quadranten wechselt, dann tut sie es im Uhrzeigersinn. Daher gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Die Bahn umkreist den Nullpunkt im Uhrzeigersinn.

2. Die Bahn bleibt für große t im selben Quadrant.

In einer Bahn, die immer im ersten oder zweiten Quadranten bleibt, ist $x(t)$ streng monoton wachsend und irgendwann größer als 2. Von da an nimmt aber L ab, das deutet daraufhin daß der Quadrant doch verlassen wird.

Analysis

Es sei nun $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ eine Bahn, die den Nullpunkt im Uhrzeigersinn umkreist. Wir betrachten die Folge der Schnittpunkte mit der positiven x-Achse. Die ist einweder monoton steigend oder fallend, sonst würden sich Bahnen selbst kreuzen.

Falls kleine Anfangswerte steigt die Folge, für große Anfangswerte fällt sie. Aus Stetigkeitsgründen muß eine periodische Bahn existieren, eine geschlossene Kurve die immer wieder durchlaufen wird.

Das Phasenbild zeigt: alle Bahnen nähern sich asymptotisch dieser periodischen Bahn an. Es liegt ein "periodischen Attraktor" vor.

Satz von Poincaré/Bendixson

Der folgende Satz gilt für beliebige Richtungsfelder in der Ebene.

Satz. Für jede Bahn ist genau eine der drei Aussagen richtig:

(1) Die Bahn nähert sich asymptotisch einem Gleichgewichtspunkt an.

(2) Die Bahn nähert sich asymptotisch einer periodischen Bahn an.

(3) Die Bahn ist nicht beschränkt.

Im Fall einer Senke oder einer stabilen periodischen Bahn kann man das asymptotische Verhalten ziemlich gut vorhersagen, auch wenn man den Anfangswert nicht genau kennt!

Die Methode von Lyapunov

Wir betrachten das Richtungsfeld

$$F(x,y) = (-y - x^3, x)$$

Es gibt ein Equilibrium bei O. Der Satz von Hartman/Grobman hilft hier nicht. Analog zur Volterra-Lotka Gleichung untersuchen wir die Zeitentwicklung von $L(x,y) := x^2 + y^2$:

Die Methode von Lyapunov

$$\frac{dL(x(t), y(t))}{dt} = \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial L(x,y)}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) =$$

$$2x(t)(-y(t) - x(t)^3) + 2y(t)x(t) = -2x(t)^4.$$

Daher kann L nie steigen, und nur auf der y-Achse konstant sein. Auf der x-Achse gibt es aber keine Bahnen außer der konstanten Bahn bei O.

Daher sind alle Gebiete der Form $\{(x,y) \mid L(x,y) \leq c\}$ stabil, und 0 ist eine Senke.

Lyapunov für hyperbolische Senken

Die Differentialgleichung mit Richtungsfeld

$$F(x,y) = (-x - y - x^2/2, x - y)$$

hat in O eine hyperbolische Senke (Eigenwerte $-1 \pm i$) und in $(-4,-4)$ einen Sattelpunkt (Eigenwerte $1 \pm \sqrt{3}$). Für $L(x,y) = x^2 + y^2$ gilt

$$\frac{dL(x(t),y(t)}{dt} = \frac{\partial L(x,y)}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial L(x,y)}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t) =$$

$$2x(t)(-x(t)-y(t)-x(t)^2/2)+2y(t)(x(t)-y(t)) = -2x(t)^2-2y(t)^2-x(t)^3$$

Lyapunov für hyperbolische Senken

Die Funktion $(x, y) \mapsto -2x^2 - 2y^2 - x^3 = -x^2(x+2) - y^2$ ist für $x > -2$, $(x, y) \neq O$ negativ. Daher ist in diesem Bereich L auf allen Bahnen fallend, und die Kreisscheiben mit Radius kleiner als 2 sind Einzugsgebiete der Senke.

Der Lorentz Attraktor

Die Differentialgleichung mit Richtungsfeld

$$F(x, y, z) = (10y - 10x, -xz + 28x - y, xy - 8/3z)$$

beschreibt Luftströme in der Erdatmosphäre.

Man berechne die Fixpunkte. Sind sie hyperbolisch?

Analyse

Wir untersuchen die linearen Approximationen an den hyperbolischen Fixpunkten. Gibt es Quellen/Senken?

Wir untersuchen die Änderung der Funktion

$$L(x, y, z) = 28x^2 + 10y^2 + 10(z - 56)^2.$$

Für große M ist $L(x, y, z) \leq M$ ein stabiles Gebiet.

Das asymptotische Verhalten

Asymptotisch erreichen alle Bahnen die stabilen Innengebiete der Ellipsoide oben. Es gibt allerdings keinen stabilen Zyklus, sondern ein fraktales Gebilde, das aus zwei verflochtenen Wirbeln besteht.

Bei kleinen Änderungen des Anfangswertes kann man qualitative asymptotische Unterschiede beobachten!

Übung 10

Man überlege, ob und wie man mit eine Folge von Zufallszahlen aus der Menga $\{0, 1\}$ erzeugen kann durch Beobachtung einer Bahn der Lorentz-Differentialgleichung.

Variationsrechnung

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $D := [a, b]$. Gegeben ist eine stetige Funktion $L : D \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Sie definiert einen Operator $\mathcal{L}$ von der Menge $C^1([a, b])$ der stetig differenzierbaren Funktionen auf $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$

$$f \mapsto \int_a^b L(x, f(x), f'(x))dx.$$

Gesucht ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$, für die der Operator $\mathcal{L}$ ein Minimum oder ein Maximum annimmt.

Beispiel: $L(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$ kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten.

Variationsproblem mit Nebenbedingung

Es sei $e \in \mathbb{R}$, $N : D \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig, $\mathcal{N}$ der Operator

$$f \mapsto \int_a^b N(x, f(x), f'(x))dx.$$

Gesucht ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(a) = c$ und $f(b) = d$, für die der Operator $\mathcal{L}$ ein Minimum oder ein Maximum annimmt unter der Nebenbedingung $\mathcal{N}(f) = e$.

Beispiel: $c = d = 0$, $L(x, y, z) = \sqrt{1 + z^2}$, $N(x, y, z) = y$ gibt das Problem, eine Fläche mit gegebener Fläche und möglichst kleinem Umfang zu finden.

Die Euler-Lagrange Gleichung

Es sei f die optimale Funktion, $g : D \to \mathbb{R}$ in $C^1([a,b])$ mit $g(a) = g(b) = 0$. Dann hat die Funktion $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \mathcal{L}(f + tg)$ einen Extremwert bei 0. Wir berechnen die Ableitung bei 0:

$$l'(0) = \int_a^b \frac{d}{dt} L(x, f(x) + tg(x), f'(x) + tg'(x))|_{t=0} dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) g(x) dx + \int_a^b \frac{\partial L}{\partial z}(x, f(x), f'(x)) g'(x) dx$$

$$= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) g(x) dx - \int \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial z}(x, f(x), f'(x)) g(x) dx,$$

wobei wir in der letzten Umformung partielle Integration und $g(a) = g(b) = 0$ verwenden.

Die Euler-Lagrange Gleichung

Nachdem das Integral über die Funktion

$$x \mapsto (\frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x, f(x), f'(x)))g(x)$$

für jede Funktion g Null sein soll, muß der erste Faktor Null sein:

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial z}(x, f(x), f'(x)) = 0$$

Die schnellste Verbindung zwischen zwei Punkten

Gesucht ist eine Kurve zwischen zwei Punkten unterschiedlicher Höhe, sodaß die Zeit, auf der sich ein Punkt am schnellsten vom höheren Punkt zum tieferen bewegt. Die Reibung soll vernachlässigt werden.

$$L = \frac{\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{-2gy}}$$

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

$$x = C_1(t - sint) + C_2, y = C_1(-1 + cost)$$

ist eine parametrische Lösung, wie man am einfachsten durch Einsetzen bestätigt.

Zitat zur schnellsten Verbindung

Die scharfsinnigsten Mathematiker des ganzen Erdkreises gruesst Johann Bernoulli, oeffentlicher Professor der Mathematik. Da die Erfahrung zeigt, dass edle Geister zur Arbeit an der Vermehrung des Wissens durch nichts mehr angetrieben werden, als wenn man ihnen schwierige und zugleich nuetzliche Aufgaben vorlegt, durch deren Loesung sie einen beruehmten Namen erlangen und sich bei der Nachwelt ein ewiges Denkmal setzen, so hoffte ich den Dank der mathematischen Welt zu verdienen, wenn ich nach dem Beispiele von Maennern wie Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani und anderen, welche vor mir dasselbe thaten, den ausgezeichnetsten Analysten dieser Zeit eine Aufgabe vorlegte, damit sie daran, wie an einem Pruefsteine, die Guete ihrer Methoden beurtheilen, ihre Kraefte erproben und, wenn sie etwas faenden, mir mittheilen koennten; dann wuerde einem jeden oeffentlich sein verdientes Lob von mir zu Theil geworden sein.

(Groningen 1697)

Geodätische Linien

Gegeben sei eine Fläche im Raum und zwei Punkte auf ihr. Gesucht ist die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten auf der Fläche. Dieses Problem läßt sich mit Variationsrechnung auf eine Differentialgleichung zurückführen. Die Lösungen dieser Gleichung heißen geodätische Linien.

Auf der Kugel sind die geodätischen Linien die Kreise mit Radius gleich Kugelradius.

Wie findet man die geodätischen Linien auf Zylindern/Kegeln?

Das isoperimetrische Problem

Gegeben seien zwei Punkte p und q und eine postive Zahl A. Gesucht ist eine Kurve von möglichst kleiner Bogenlänge, sodaß die Fläche, die von der Kurve und der Strecke zwischen p und q eingeschloßen wird, gleich A ist.

Man stelle die Differentialgleichung auf.

Minimalflächen

Wenn man eine geschlossene Kurve aus gebogenem Draht in Seifenwasser taucht und wieder rauszieht, umschließt die Kurve eine Hautfläche. Wenn die Kurve eben ist, dann ist die Fläche eben. Im allgemeinen sorgen die Molekularkräfte dafür, daß die Fläche möglichst klein ist.

Partielle Differentialgleichungen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Gesucht ist eine Funktion $U \to \mathbb{R}$, die eine Gleichung mit partiellen Ableitungen erfüllt.

Beispiel: Gesucht $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sodaß $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 0$ ist.

Lösung: $u(x, y) = f(y)$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion.

Abkürzende Schreibweisen

Ein variables-unabhängiges Symbol für den Operator, der aus einer Funktion in zwei Variablen die Ableitungsfunktion nach der ersten Variablen zuordnet, hat sich nicht durchgesetzt. Man schreibt oft $u_x(x,y)$ als Abkürzung für $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ und u_x für die Funktion $(x,y) \mapsto u_x(x,y)$.

Vorsicht ist angebracht bei der Umbenennung der Variablen!

Die Wellengleichung

Es sei $l > 0$. Die gesuchte Funktion $u : ([0, l] \times [0, \infty)) \to \mathbb{R}$ beschreibt das Verhalten einer schwingenden Seite: $u(x, t)$ ist die Auslenkung in y-Richtung der Seite an einem bestimmten x-Wert der Seite zum Zeitpunkt t.

Die angrenzenden "Teile" der Seite üben durch die Elastizität eine Kraft aus, die proportional zu u_{xx} ist. Nach dem zweiten Newtonschen Gesetz ist die Kraft proportional zur Beschleunigung. Wir erhalten die Gleichung

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \ c \in (0, \infty).$$

Zusatzbedingungen

Während bei gewöhnlichen Differentialgleichungen Anfangswerte vorgegeben werden können, können wir bei der Wellengleichung Funktionswerte am Rand des Definitionsgebietes vorschreiben:

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \text{ für alle } t > 0.$$

Darüber hinaus kann man noch für $u(x,0)$ und $u_t(x,0)$ Funktionen vorgeben.

Lösung nach d'Alembert

Der Ansatz $u(x,t) = v(x+ct, x-ct)$ führt zur Gleichung $v_{p,q}(p,q) = 0$. Es folgt

$$v_p(p,q) = g(p), v(p,q) = \int g(p)dp + h(q),$$

wobei g und q beliebige differenzierbare Funktionen sind. Wenn wir g nicht mehr verwenden, können wir das Symbol für die Stammfunktion verwenden und erhalten die allgemeine Lösung

$$u(x,t) = g(x+ct) + h(x-ct).$$

Lösung nach d'Alembert

Wegen der Zusatzbedingung am Rand des Intervalls gilt

$$g(x + 2l) = g(x), h(x) = -g(-x).$$

Wir betrachten zunächst den Fall $u_t(x, 0) = 0$. Dann ist $g(x) = h(x) = \frac{u(x,0)}{2}$.

Nun kommt der Fall $u(x, 0) = 0$. Dann ist $g(x) = -h(x) = \frac{1}{2c}\int_0^x u_t(y, 0)dy$. Es folgt eine Bedingung für $u_t(x, 0)$, nämlich

$$\int_0^x u_t(x, 0)dx = 0$$

Lösung nach d'Alembert

Falls $u(x, 0)$ und $u_t(x, 0)$ beide ungleich 0 sind, löst man zwei Teilprobleme, indem man zuerst $u(x, 0)$ und dann $u_t(x, 0)$ Null setzt. Dann werden die Lösungen einfach addiert.

Lösung nach Bernoulli

Der Ansatz $u(x,t) = f(t)g(x)$ führt zu

$$f''(t) = \lambda f(t), g''(x) = \lambda c^2 g(x), \lambda \in \mathbb{R}$$

Wegen den Randbedingungen muß $g(0) = g(l) = 0$ gelten.

Für welche Werte von λ hat das “Randwertproblem”

$$g''(x) = \lambda g(x), g(0) = g(l) = 0$$

eine nichttriviale Lösung?

Lösung nach Bernoulli

Für $\lambda = \frac{n^2 l}{2\pi}$ ist

$$g(x) = \sin\left(\frac{nx}{2\pi}\right), f(t) = \sin\left(\frac{nct}{2\pi}\right)$$

eine nichttriviale Lösung. Für alle anderen λ existiert keine nichttriviale Lösung.

Das führt zu den speziellen Lösungen für $u(x,t)$

$$\sin\left(\frac{nx}{2\pi}\right)\sin\left(\frac{nct}{2\pi}\right), \sin\left(\frac{nx}{2\pi}\right)\cos\left(\frac{nct}{2\pi}\right)$$

Lösung nach Bernoulli

Alle Lösungen lassen sich durch Summenbildung aus den bereits gewonnenen Lösungen gewinnen:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin\left(\frac{nx}{2\pi}\right) \sin\left(\frac{nct}{2\pi}\right) + b_n \sin\left(\frac{nx}{2\pi}\right) \cos\left(\frac{nct}{2\pi}\right))$$

Wenn Anfangsfunktionen gegeben sind, entwickelt man sie in eine Fourier-Reihe und bekommt sofort die Koeffizienten a_n, b_n der Lösung.

Nichtdifferenzierbare Lösungen

Die gefundene Lösung nach d'Alembert läßt sich verallgemeinern auf den Fall daß die Anfangsfunktionen $u(x,0)$ nur mehr stücksweise differenzierbar sind.

Beispiel: $u(x,0) = kx$ für $x \leq \frac{l}{2}$, $u(x,0) = k(l-x)$ für $x \geq \frac{l}{2}$, $u_t(x,0) = 0$.

Beispiel: $u(x,0) = 0$ für x mit $|x - \frac{l}{2}| \geq \frac{a}{2}$, wobei $a \leq l$, $u(x,0) = \frac{a}{2} - |x - \frac{l}{2}|$ für alle x mit $|x - \frac{l}{2}| \leq \frac{a}{2}$.

Die mehrdimensionale Wellengleichung

Wellen in einem Teich: Gesucht ist $u(x_1, x_2, t)$, die Höhe des Wasserspiegels am Punkt (x_1, x_2) zum Zeitpunkt t.

Schallwellen: Gesucht ist $u(x_1, x_2, x_3, t)$, die Luftdichte am Punkt (x_1, x_2, x_3) zum Zeitpunkt t.

Die mehrdimensionale Wellengleichung

Gesucht ist $u : (\mathbb{R}^n \times [0, \infty)) \to \mathbb{R}$, sodaß

$$u_{tt}(x_1, \ldots, x_n, t) = c^2(u_{x_1x_1}(x_1, \ldots, x_n, t) + \cdots + u_{x_nx_n}(x_1, \ldots, x_n, t)).$$

Der Operator $f \mapsto (f_{x_1x_1} + \cdots + f_{x_nx_n})$ wird auch mit Δ bezeichnet, damit sieht die Gleichung so aus:

$$u_{tt} = c^2 \Delta u$$

Kugelförmige Wellen

Eine Lösung u heißt kugelförmig wenn sie nur von t und $r := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ abhängt. Wir schreiben die Lösung als $u(r,t)$.

Berechnung der Gleichung für dieses u ergibt

$$u_{tt} = c^2\left(u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r\right)$$

Kugelförmige Wellen

Für ein bestimmtes n (welches?) führt die Transformation

$$u(r,t) = \frac{v(r,t)}{r}, \; v(r,t) = ru(r,t)$$

auf die Gleichung

$$v_{tt} = c^2 v_{rr}$$

Die gesuchte Funktion $v : ([0,\infty))^2 \to \mathbb{R}$ erfüllt die Nebenbedingung $v(0,t) = 0$.

Kugelförmige Wellen

Die allgemeine Lösung nach d'Alembert liefert $v(r,t) = f(r+ct)+g(r-ct)$. Wegen der Nebenbedingung gilt $g(x) = -f(-x)$, also $v(r,t) = f(r+ct) - f(-r+ct)$.

Wir nehmen folgende Anfangsfunktionen an: $u(r,0) = \max(h-r,0)$ für ein kleines $h > 0$, $v(r,0) = \max(r(h-r),0)$, $v_t(r,0) = u_t(r,0) = 0$.

Kugelförmige Wellen

$$f(x) = \frac{v(x,0)}{2} \text{ für } x \geq 0, f(x) = -\frac{v(-x,0)}{2} \text{ für } x < 0.$$

Für die Werte (r,t) mit $r + ct > h$ ist dann

$$v(r,t) = -\frac{\max((r-ct)(h-r+ct),0)}{2r}$$

Wir haben eine kugelförmige Welle, die sich mit Geschwindigkeit c ausbreitet, und deren Höhe invers proportional zu r ist.

Schallwellen und Wasserwellen

Wie berechnet, breiten sich Schallwellen kueglförmig nach außen aus und nehmen dabei ab.

Für $n = 2$ ist die Lösung etwas komplizierter. Es zeigt sich, daß für $r > ct + h$ wieder $v(r, t) = 0$ ist; die Welle kann sich nicht schneller als c ausbreiten. Im Unterschied zum Fall $n = 3$ ist aber v im Inneren des Kreises nicht Null.

Übung 8

Was bedeutet der Begriff “Huygens’sches Prinzip” und was hat er mit dem oben besprochenen Phänomen zu tun? Recherchieren Sie im Internet.