Analysis II

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Dr. G. Herzog

20. Februar 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Normierte Lineare Räume, Konvergenz

Mit V, W bezeichnen wir stets *reelle Vektorräume* (VR). Ist V endlich dimensional, so schreiben wir auch V_n mit $n = \dim V$.

Bsp.

- $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
- $\mathbb{R}^{nm}$ $(n, m \in \mathbb{N})$.
- $\mathbb{R}[t]$ (Vektorraum aller reellen Polynome). Es gilt $\dim \mathbb{R}[t] = \infty$.
- Für $a < b$ sind $C([a,b])$, $C^n([a,b])$, $R([a,b])$, $BV([a,b])$ unendlich dimensionale Vektorräume.

Def. 1 Eine Abbildung $|| || : V \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

1. $||x|| \geq 0 \quad (x \in V)$ und $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x|| \quad (x \in V, \lambda \in \mathbb{R})$ (*Homogenität*)
3. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad (x, y \in V)$ (*Dreiecksungleichung*)

heißt *Norm* auf V. Ist $|| ||$ eine Norm auf V, so heißt $(V, || ||)$ ein *normierter linearer Raum*. Für $x, y \in V$ heißt $||x - y||$ der *Abstand* von x und y (bzgl. $|| ||$).

Bsp.

- Sei $V := \mathbb{R}$. Dann ist $||x|| := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ eine Norm.
- Für $V := \mathbb{R}^n$ sind folgende Abbildungen Normen:
  - ⋄ $||x|| := \max\{|\xi_1|, \dots, |\xi_n|\}$ (*Maximumsnorm*)
  - ⋄ $||x|| := \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|$ (*Betragssummennorm*)
  - ⋄ $||x|| := \sqrt{|\xi_1|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}$ (Euklid-*Norm*), vgl. Satz 1)
- Für $V := C([a,b])$ sind folgede Abbildungen Normen:
  - ⋄ $||f|| := \max\{|f(t)| : \; t \in [a,b]\}$
  - ⋄ $||f|| := \int\limits_a^b |f(t)| dt$

- Wie in Analysis I zeigt man:
  - ◇ $\Big| ||x|| - ||y|| \Big| \leq ||x-y|| \qquad (x, y \in V)$
  - ◇ $|| \sum\limits_{k=1}^{n} x_k || \leq \sum\limits_{k=1}^{n} ||x_k|| \qquad (x_1, \ldots, x_n \in V)$

Def. 2 Es seien $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$xy := xy := \xi_1\eta_1 + \cdots + \xi_n\eta_n$$

heißt *Innenprodukt* oder *Skalarprodukt* von x und y.

Satz 1 Sei für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ die Abbildung $|||| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$||x|| := \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2} = \sqrt{xx}$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt dann:

1. $||x|| \geq 0$ und $||x|| = 0 \iff x = 0$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| \; ||x||$
3. $|xy| \leq ||x|| ||y||$ (CAUCHY-SCHWARZ-sche Ungleichung)
4. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$

Damit wird durch $||||$ eine Norm definiert. Diese Norm heißt EUKLID-*Norm*

Def. 3 Es sei $(V, ||||)$ ein normierter linearer Raum.

1. Eine Menge $A \subseteq V$ heißt *beschränkt* $:\iff$

$$\exists \quad c \geq 0 \quad \forall \quad x \in A: \qquad ||x|| \leq c$$

2. Eine Folge (x_n) in V heißt *konvergent* $:\iff$

$$\exists \quad x \in V \quad \forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0: \qquad ||x_n - x|| < \varepsilon$$

   In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* der Folge (x_n). Schreibweise

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{oder} \qquad x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$$

3. Eine Folge (x_n) in V heißt CAUCHY-*Folge*, falls gilt:

$$\forall \quad \varepsilon > 0 \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n, m \geq n_0: \qquad ||x_n - x_m|| < \varepsilon$$

Für Folgen in normierten linearen Räumen sind die Begriffe „Divergenz“, „Beschränktheit“ und „Teilfolge“ wie für Folgen in $\mathbb{R}$ definiert.

Def. 4 Ein normierter linearer Raum $(V, ||||)$ heißt *vollständig* oder BANACH-*Raum*, falls gilt: Jede CAUCHY-Folge in V ist konvergent.

Bem. Die Begriffe der obigen Definitionen hängen im allgemeinen von der gewählten Norm ab.

Def. 5 Für zwei Normen $||\,||_1, ||\,||_2$ auf V schreiben wir $||\,||_1 \sim ||\,||_2$, falls gilt:

$$\exists \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall \quad x \in V: \qquad \alpha ||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \beta ||x||_1$$

Satz 2 „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Normen auf V.

Satz 3 Sind $||\,||_1, ||\,||_2$ Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum V_n, so gilt $||\,||_1 \sim ||\,||_2$

Satz 4 Sei $(V_n, ||\,||)$ ein normierter linearer Raum. Dann gilt:

1. Ist $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis von V_n und

$$(x_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(k)} b_j \right)_{k=1}^{\infty}$$

eine Folge in V_n, so gilt: $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ ist genau dann konvergent, wenn die Folgen $(\xi_j^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(j = 1, \ldots, n)$ konvergent sind. In diesem Fall gilt

$$\lim_{k \to \infty} x_k = \sum_{j=1}^{k} \left(\lim_{k \to \infty} \xi_j^{(k)} \right) b_j$$

2. V_n ist vollständig.

Bem. Aus obigem Satz folgt für $V_n := \mathbb{R}^n$ mit beliebiger Norm: Eine Folge $(x_k) = ((\xi_1^{(k)}, \ldots, \xi_n^{(k)}))$ in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn alle Koordinatenfolgen (ξ_i^k) $(i = 1, \ldots, n)$ konvergieren.

Satz 5 (Satz von Bolzano-Weierstra) Es sei $(V_n, ||\,||)$ ein endlich dimensionaler normierter linearer Raum und (x_k) eine beschränkte Folge in V_n. Dann besitzt (x_k) eine konvergente Teilfolge.

Satz 6 Es sei $\Phi \in \mathcal{L}(V_n, W)$. Dann gilt: Die Menge

$$M := \left\{ \frac{||\Phi(x)||_W}{||x||_V} : \quad x \in V_n \setminus \{0\} \right\}$$

ist beschränkt und $|||\,||| : \mathcal{L}(V_n, W) \to \mathbb{R}$ mit

$$|||\Phi||| := \sup_{x \neq 0} \frac{||\Phi(x)||_W}{||x||_V} (= \sup M)$$

ist eine Norm auf $\mathcal{L}(V_n, W)$. Für diese Norm gilt:

$$||\Phi(x)||_W \leq |||\Phi||| ||x||_V \qquad (x \in V)$$

2 Topologische Grundbegriffe

Im Folgenden sei $(V_n, ||||)$ ein normierter linearer Raum. Für $x_0 \in V, \delta > 0$ heißt

$$U_\delta(x_0) := \{x \in V : \quad ||x - x_0|| < \delta\}$$

δ-Umgebung von x_0 oder *offene Kugel* um x_0 mit Radius δ.

Def. 6 Sei $A \subseteq V$.

1. $x_0 \in A$ heißt *innerer Punkt* von A, wenn gilt:

$$\exists \quad \delta > 0 : \qquad U_\delta(x_0) \subseteq A$$

2. $A^0 := \{x \in A : \ x \text{ ist innerer Punkt von } A\}$
3. A heißt *offen*, wenn gilt $A^0 = A$.

Satz 7

1. Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
2. Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen.

Def. 7 Sei $A \subseteq V$.

1. $x_0 \in V$ heißt *Häufungspunkt* von A $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \quad \delta > 0 : \qquad (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$$

2. $H(A) := \{x \in V : \ x \text{ ist Häufungspunkt von } A\}$
3. $\overline{A} := A \cup H(A)$ ($\overline{A}$ heißt *Abschluß* von A)
4. A heißt *abgeschlossen* $:\Longleftrightarrow A = \overline{A}$

Satz 8 Sei $A \subseteq V$. Dann gilt:

1. A ist abgeschlossen $\Longrightarrow V \setminus A$ ist offen.
2. Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
3. Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
4. A ist abgeschlossen $\Longrightarrow H(A) \subseteq A$

Def. 8 Sei $A \subseteq V$

1. $x_0 \in V$ heißt *Randpunkt* von A $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \quad \delta > 0 : \qquad U_\delta(x_0) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U_\delta(x_0) \cap (V \setminus A) \neq \emptyset$$

2. $\partial A := \{x \in V : x \text{ ist Randpunkt von } A\}$ heißt *Rand* von A.

Def. 9 Sei $x_0 \in V$. $U \subseteq V$ heißt *Umgebung* von x_0 $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad \delta > 0 : \qquad U_\delta(x_0) \subseteq U$$

Satz 9 Sei $A \subseteq V$. Dann gilt:

1. $x_0 \in H(A) \Longleftrightarrow$ Es gibt eine Folge (x_n) in $A \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$.
2. A ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ Für jede konvergente Folge (x_n) in A gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \in A$$

Bsp. Betrachte $\mathbb{R}^2$ mit Euklid-Norm und

$$A := U_1((0,0)) \cup \{(2 + \frac{1}{n}, 0) : \quad n \in \mathbb{N}\}$$

Dann gilt

$$\begin{array}{rcl} H(A) & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\} \cup \{(2,0)\} \\ A^0 & = & U_1((0,0)) \\ \overline{A} & = & A \cup H(A) \\ \partial A & = & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \sqrt{x^2+y^2} = 1\} \cup \{(2 + \frac{1}{n}, 0) : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{(2,0)\} \end{array}$$

3 Reihen, Grenzwerte, Stetigkeit

Es sei $(V, ||\,||)$ ein normierter linearer Raum.

Def. 10 Es seien $(V, ||\,||_1)$, $(W, ||\,||_2)$ zwei normierte lineare Räume, $D \subseteq V$. $x_0 \in H(D)$ und $f : D \to W$ eine Funktion. Weiter sei $y_0 \in W$. Es heißt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ $:\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} y_0$.

Satz 10 Unter den Voraussetzungen von Def. 10 gilt: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall\, x \in D \setminus \{x_0\} : \quad ||x - x_0||_1 < \delta \implies ||f(x) - y_0||_2 < \varepsilon$$

Bsp.

- Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y,z) := (x^2 + y^2 - z, x^2 y + \mathrm{e}^z)$$

Dann gilt:

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} f(x,y,z) = (2,2)$$

Bew: Ist (x_n, y_n, z_n) eine Folge in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1,1,0)\}$ mit Grenzwert $(1,0,0)$, so gilt:

$$\begin{array}{rl} & x_n \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad y_n \xrightarrow{n\to\infty} 1, \qquad z_n \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \implies & x_n^2 + y_n^2 - z_n \xrightarrow{n\to\infty} 2, \qquad x_n^2 y_n + \mathrm{e}^{z_n} \xrightarrow{n\to\infty} 2 \\ \implies & \text{Behauptung} \end{array}$$

$\blacksquare$

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Die Folge $((\frac{1}{n}, 0))$ hat Grenzwert $(0,0)$ und es gilt

$$f(\frac{1}{n}, 0) = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Die Folge $((\frac{1}{n}, \frac{1}{n}))$ hat Grenzwert $(0,0)$ und es gilt

$$f(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Somit existiert der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

Def. 11 Es seien $(V, ||\,||_1)$, $(W, ||\,||_2)$ normierte lineare Räume, $D \subseteq V$, $x_0 \in D$ und $f : D \to W$ sei eine Funktion. f heißt *stetig* in x_0 $:\Longleftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$.

Bem. Ist $x_0 \in D$ auch Häufungspunkt von D, so gilt:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Satz 11 Unter den Voraussetzungen von Def. 11 gilt: f ist stetig in x_0 $\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x \in D: \quad ||x - x_0||_1 < \delta \implies ||f(x) - f(x_0)||_2 < \varepsilon$$

Bem. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ ist stetig in $x_0 \in D$ $\Longleftrightarrow$ Jede Koordinatenfunktion f_k $(k = 1, \ldots, n)$ ist stetig in x_0.

Def. 12 Es seien $(V, ||\,||_1)$, $(W, ||\,||_2)$ normierte lineare Räume, $D \subseteq V$ und $f : D \to W$ sei eine Funktion.

1. f heißt *stetig* in D, wenn f in jedem $x \in D$ stetig ist,
2. f heißt *gleichmäßig* stetig $:\Longleftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; \forall\, x, y \in D: \quad ||x - y||_1 < \delta \implies ||f(x) - f(y)||_2 < \varepsilon$$

3. f heißt Lipschitz-*stetig* auf D $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad L \geq 0 \quad \forall \quad x, y \in D: \qquad ||f(x) - f(y)||_2 \leq L||x - y||_1$$

Bem. Die Eigenschaften „Existenz eines Grenzwertes“, Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit hängen für endlichdimensionale Räume V_n, W_n nicht von der gewählten Norm ab.

Bsp.

- Jede lineare Abbildung $\Phi : V_n \to W_m$ ist Lipschitz-stetig.

- Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, jedoch nicht in $(0,0)$ selbst.

- Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} \sin(x-y) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  f ist stetig auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt:

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2+y^2} |sin(x-y)| \leq |x-y|$$

  Sei $((x_n, y_n))$ Folge in $\mathbb{R}^n$ mit Grenzwert $(0,0)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{rl} & |f(x_n,y_n)| \leq |x_n - y_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \\ \Longrightarrow & f(x_n,y_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(0,0) \end{array}$$

  Somit ist f stetig in $(0,0)$. Insgesamt gilt $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ \sin y \\ \cos(xy) \end{pmatrix}$$

  f ist stetig auf $\mathbb{R}^2$, da alle Koordinatenfunktionen stetig sind.

Satz 12 Es sei $D \subseteq V$. ist (f_n) eine Folge von Funktionen $D \to W$, $x_0 \in D$ und sind alle Funktionen f_n stetig in x_0, so gilt: Konvergiert (f_n) gleichmäßig auf D gegen $f : D \to W$, so ist f stetig in x_0. Analoges gilt für Funktionenreihen.

4 Kompakte Mengen

Es sei $(V, \|\|)$ ein vollständiger normierter linearer Raum.

Def. 13 $A \subseteq V$ heißt *kompakt* $:\Longleftrightarrow$ Sind O_j $(j \in J)$ offene Teilmengen von V mit $A \subseteq \bigcup\limits_{j \in J} O_j$, so gibt es endlich viele Mengen $O_{j_1}, \ldots, O_{j_n}$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{k=1}^{n} O_{j_k}$. $\{O_j : j \in J\}$ heißt *Überdeckung* von A.

Satz 13 Ist $A \subseteq V$ kompakt, so ist A beschränkt und abgeschlossen.

Bem. In unendlich dimensionalen normierten linearen Räumen sind abgeschlossene und beschränkte Mengen im Allgemeinen nicht kompakt.

Satz 14 (Satz von HEINE-BOREL) Es sei $(V_n, \|\|)$ ein endlich dimensionaler normierter linearer Raum und $A \subseteq V_n$, $A \neq \emptyset$ beschränkt und abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Satz 15 Sei $A \subseteq V_n$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. A ist kompakt
2. A ist beschränkt und abgeschlossen
3. Jede Folge (x_k) in A besitzt eine konvergente Teilfolge, deren Grenzwert in A liegt.

Bem.

- Die Äquivalenz von (1) und (3) gilt auch in unendlichdimensionalen normierten linearen Räumen.
- Auch die Äquivalenz von (1) und (2) wird teilweise als Satz von BOLZANO-WEIERSTRA bezeichnet.

Satz 16 Es seien $(V_n, ||||_1)$, $(W_m, ||||_2)$ endlich dimensionale normierte lineare Räume. Es sei $\emptyset \neq D \subseteq V_n$ kompakt, $f : D \to W_m$ stetig. Dann gilt:

1. $f(D)$ ist kompakt
2. Ist $W_m = \mathbb{R}$, so gibt es $x_1, x_2 \in D$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $(x \in D)$.

Satz 17 Es seien $(V_n, ||||_1)$, $(W_m, ||||_2)$ endlich dimensionale normierte lineare Räume. Es sei $\emptyset \neq D \subseteq V_n$ kompakt und $f : D \to W_m$ stetig. Dann gilt: f ist gleichmäßig stetig auf D.

5 Differenzierbarkeit

Ab jetzt betrachten wir nur noch endlich dimensionale Räume, o.B.d.A. repräsentiert durch $(\mathbb{R}^n, ||||)$. $||||$ sei die Euklidnorm. Weiter sei im Folgenden stets $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

Def. 14 Es sei $x_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^m$ heißt im Punkt x_0 (total) *differenzierbar* $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad A \in \mathbb{R}^{mn} : \qquad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - Ah}{||h||} \longrightarrow 0 \qquad (h \to 0).$$

In diesem Fall heißt A *Ableitung* von f an der Stelle x_0. Schreibweise: $f'(x_0) = A$.

Bem.

- Es sei $n = m = 1$, D ein offenes Intervall. In diesem Fall stimmt die obige Definition mit der bisherigen Definition der Ableitung überein.
- Die Matrix A aus obiger Definition ist eindeutig bestimmt.
- Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in jedem Punkt $x \in D$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar auf D. In diesem Fall ist durch die Zuordnung $x \to f'(x)$ eine Abbildung $f' : D \to \mathbb{R}^{mn}$ erklärt. Ist $f' : D \to \mathbb{R}^{mn}$ stetig auf D, so heißt f stetig differenzierbar auf D.

$$C^1(D, \mathbb{R}^m) := \{f : D \to \mathbb{R}^m : \quad f \text{ stetig differenzierbar auf D}\}$$

- Existenz und Wert einer Ableitung hängen nicht von der verwendeten Norm ab.

Satz 18 Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in x_0 differenzierbar, so ist f in x_0 stetig.

Bsp. Sei $A \in \mathbb{R}^{mn}, b \in \mathbb{R}^m$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definiert durch

$$f(x) = Ax + b$$

Dann gilt

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0) - Ah}{||h||} = \frac{A(x_0+h) - b - Ax_0 + b - Ah}{||h||} = 0$$

Also ist f auf $\mathbb{R}^n$ differenzierbar und $f'(x) = A$ $(x \in \mathbb{R}^n)$.

Satz 19 (Kettenregel) Es seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ und $E \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ und $g : E \to \mathbb{R}^k$ Funktionen mit $f(D) \subseteq E$. Ist dann f differenzierbar in $x_0 \in D$ und g differenzierbar in $f(x_0)(\in E)$, so ist $F := g \circ f : D \to \mathbb{R}^k$ differenzierbar in x_0 und es gilt:

$$F'(x_0) = \underbrace{\underbrace{g'(f(x_0))}_{\in \mathbb{R}^{km}} \; \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{mn}}}_{\in \mathbb{R}^{kn}}.$$

Bem. Weiter gilt: Sind $f, g : D \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar in $x_0 \in D$, so ist

- $f + g$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

- λf differenzierbar in x_0 und es gilt

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0) \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Def. 15 Es seien $\{e_1, \ldots, e_n\}$ und $\{u_1, \ldots, u_m\}$ die Standardbasen von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit den Komponentenfunktionen $f_k : D \to \mathbb{R}$ $(k = 1, \ldots, n)$. Für $x_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in D$ und $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ definieren wir

$$\frac{\partial f_i}{\partial \xi_j}(x_0) := (f_i)_{\xi_j}(x_0) := (D_j f_i)(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f_i(x_0 + te_j) - f_i(x_0)}{t},$$

falls dieser Grenzwert existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *partielle Ableitung* von f_i nach der j-ten Koordinate an der Stelle x_0. Existieren alle partiellen Ableitungen $(D_j f_i)(x_0)$ $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$ so heißt f an der Stelle x_0 *partiell differenzierbar* . Existieren alle partiellen Ableitungen für jedes $x \in D$, so heißt f auf D partiell differenzierbar. Sind dann auch noch alle partiellen Ableitungen auf D stetig, so heißt f auf D *stetig partiell differenzierbar.*

Bsp.

- Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 z \\ \mathrm{e}^y xz \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \end{pmatrix}$$
Dann gilt
$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) = 2xz, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) = \mathrm{e}^y z,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) = 0, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) = \mathrm{e}^y xz,$$
$$\frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) = x^2, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) = \mathrm{e}^y x.$$
- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
Es gilt:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$
Analog gilt $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. f ist also in $(0,0)$ partiell differenzierbar. f ist aber nicht differenzierbar in $(0,0)$, weil f dort nicht stetig ist.

Satz 20 Sie $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine in $x_0 \in D$ differenzierbare Funktion. Dann ist f in x_0 partiell differenzierbar und es gilt
$$f'(x_0)e_j = \sum_{i=1}^{m} (D_j f_i)(x_0) u_i \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Bem. Ist $f : D \to \mathbb{R}^m$ in x_0 differenzierbar, so hat die Matrix $f'(x_0)$ die folgende Gestalt:
$$f(x_0) = \begin{pmatrix} (D_1 f_1)(x_0) & \cdots & (D_n f_1)(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_1 f_m)(x_0) & \cdots & (D_n f_m)(x_0) \end{pmatrix}$$

Def. 16 Sei V ein Vektorraum. Eine Menge $A \subseteq V$ heißt *konvex* $:\Longleftrightarrow$ Für alle Punkte $x, y \in A$ gilt:
$$s(x,y) := \{tx + (1-t)y : \ t \in [0,1]\} \subseteq A.$$
Ist $(V, \|\|)$ ein normierter linearer Raum, so sind Kugeln $U_r(x)$ $(x \in V, r > 0)$ stets konvex. $s(x,y)$ heißt *Verbindungsstrecke* zwischen x und y.

Satz 21 (Mittelwertsatz) Es seien $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D, $a, b \in D$, $a \neq b$ mit $s(a,b) \subseteq D$. Dann gilt:

$$\exists \quad \xi \in s(a,b) \setminus \{a,b\} : \qquad f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$$

Bem.

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf D, D konvex und $||f'(x)|| \leq L$ $(x \in D)$. Dann gilt:
$$|f(x) - f(y)| \leq L||x-y|| \qquad (x, y \in D)$$
- Der Mittelwertsatz gilt im Allgemeinen nicht für Funktionen $f : D \to \mathbb{R}^m$ mit $m > 1$. Beispiel:
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{mit} \qquad f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$
Es gilt:
$$f(2\pi) - f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -\sin\xi \\ \cos\xi \end{pmatrix} (2\pi - 0)$$

Satz 22 Sei $f : D \to \mathbb{R}^m$ eine Funktion. Dann gilt: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m) \iff f$ ist auf D stetig partiell differenzierbar.

Bsp.

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y^2 \\ e^x y \end{pmatrix}$$
f ist stetig partiell differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, somit ist $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und es gilt
$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^3 & 3x^2y^2 \\ e^x y & e^x \end{pmatrix} \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
- Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$$
Es gilt $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ und
$$\begin{aligned} f'(x,y,z) &= \left(-\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}, -\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right) \\ &= -\frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^2}(x,y,z) \end{aligned}$$
- Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit
$$f(x) = (x^2, \sin x)$$
Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2), f'(x) = (2x, \cos x)$

Schreibweise: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ an der Stelle x_0 partiell differenzierbar, so schreibt man auch

$$\text{grad } f(x_0) := ((D_1 f)(x_0), \ldots, (D_n f)(x_0))$$

(*Gradient*) von f an der Stelle x_0. Ist f in x_0 differenzierbar, so gilt also

$$f'(x_0) = \text{grad } f(x_0).$$

Ist $f : D \to \mathbb{R}^n$ in x_0 differenzierbar, so ist

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x_0) \\ \vdots \\ \text{grad } f_n(x_0) \end{pmatrix}$$

Def. 17 Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$. Wir definieren

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t},$$

falls dieser Grenzwert existiert. In diesem Fall heißt dieser Grenzwert *Richtungsableitung* von f an der Stelle x_0 in Richtung v.

Bem. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ in x_0 partiell differenzierbar, so ist $(D_i f)(x_0)$ die Richtungsableitung von f in Richtung von des Basisvektors e_i, also

$$(D_i f)(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

Satz 23 Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $||v|| = 1$. Dann gilt:

1. $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = f'(x_0)v = v \text{ grad } f(x_0)$
2. $\max\{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0),\ v \in \mathbb{R}^n,\ ||v|| = 1\} = ||\text{grad } f(x_0)||$

Bem. Anschaulich bedeutet dies: grad $f(x_0)$ zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs.

6 Der Fixpunktsatz von Banach

Sei $(V, ||||)$ ein normierter linearer Raum.

Satz 24 (Fixpunktsatz von Banach) Ist $A \subseteq V$ abgeschlossen, $A \neq \emptyset$ und $g : A \to A$ eine Abbildung mit

$$\exists \quad q \in [0,1) \quad \forall \quad x, y \in A : \qquad ||g(x) - g(y)|| \leq q||x - y||$$

Dann besitzt g genau einen *Fixpunkt*, d.h. es gibt genau ein $x \in A$ mit $g(x) = x$.

7 Vorbereitungen zum Satz über die Umkehrfunktion

Satz 25 Sei Ω die Menge aller invertierbaren Matrizen in $\mathbb{R}^{nn}$. Dann gilt:

1. Ist $A \in \Omega$, $B \in \mathbb{R}^{nn}$ und gilt
$$|||A - B||| < \frac{1}{|||A^{-1}|||},$$
so ist B invertierbar

2. Ω ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{nn}$ und $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^{nn}, \Phi(A) := A^{-1}$ ist eine stetige Abbildung.

Satz 26 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und konvex, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$ mit $|||f'(x)||| \leq L$ $(x \in D)$. Dann gilt
$$||f(x) - f(y)|| \leq L||x - y|| \qquad (x, y \in D).$$

8 Der Satz über die Umkehrfunktion

Satz 27 (Satz über die Umkehrfunktion) Es sei $D \subseteq R^n$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$. Weiter sei $x_0 \in D$ und $f'(x_0)$ invertierbar. Dann gilt:

1. Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq D$ von x_0 und eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $y_0 := f(x_0)$ derart, daß f auf U injektiv ist und $f(U) = \tilde{U}$ gilt.

2. Ist $f^{-1} : \tilde{U} \to U$ die Inverse von $f : U \to \tilde{U}$, so ist $f^{-1} \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$ und es gilt:
$$(f^{-1})'(x) = (f'(f^{-1}(x)))^{-1} \qquad (x \in \tilde{U}).$$

Bsp. Sei $f : D := \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$f(x, y) := (\sin xy, 2e^x y^2)$$
Es gilt $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ und
$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} y\cos xy & x\cos xy \\ 2e^x y^2 & 4e^x y \end{pmatrix}$$
An der Stelle $x_0 := (0, 1)$ gilt
$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$
Wegen $\det f'(0, 1) = 4 \neq 0$ ist $f'(0, 1)$ regulär. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion existiert also eine offene Umgebung U von $(0, 1)$ und eine offene Umgebung $\tilde{U}$ von $f(0, 1) = (0, 2)$, so daß $f : U \to \tilde{U}$ bijektiv ist. $f^{-1} : \tilde{U} \to U$ ist stetig differenzierbar auf $\tilde{U}$. Es gilt:
$$(f^{-1})'(0, 2) = (f'(f^{-1}(0, 2)))^{-1} = (f'(0, 1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Satz 28 Ist $D \subseteq \mathbb{R}^n, f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in D$, dann ist $f(E)$ offen für jede Teilmenge E von D. Man sagt auch f ist eine *offene Abbildung* von D nach $\mathbb{R}^n$

9 Der Satz über implizit definierte Funktionen

Bsp. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ und $(x_0, y_0) := (\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$. Gesucht ist eine Funktion $g : (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, g(x)) = 0 \qquad (x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$$

Lösung: $g(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Für $(x_0, y_0) := (1, 0)$ gibt es keine geschlossene Darstellung für eine solche Funktion.

Notation: Ist $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ und $y = (\eta_1, \ldots, \eta_m) \in \mathbb{R}^m$, so schreiben wir (x, y) für den Vektor $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^{n+m}$. $A \in \mathbb{R}^{n(n+m)}$ läßt sich in zwei lineare Abbildungen A_x und A_y zerlegen, die durch

$$A_x x := A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}^n) \qquad \text{bzw} \qquad A_y y := A \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \quad (y \in \mathbb{R}^m)$$

definiert sind. Damit ist A in zwei „Matrixblöcke" zerlegt:

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A_x | A_y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Es gilt außerdem $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_x x + A_y y$.

Satz 29 Ist $A \in \mathbb{R}^{n(n+m)}$ und ist A_x invertierbar, so gibt es zu jedem $y \in \mathbb{R}^m$ genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$, nämlich

$$x = -(A_x)^{-1} A_y y$$

Bem. In diesem Fall ist also durch die Gleichung

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

implizit eine Funktion $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definiert, für die gilt:

$$g(y) = -(A_x)^{-1} A_y y$$

Satz 30 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $(x_0, y_0) \in D$ mit $f(x_0, y_0) = 0$ und für $A := f'(x_0, y_0)$ sei A_x invertierbar. Dann gibt es offene Mengen $U \subseteq D$ und $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $(x_0, y_0) \in U$ und $y_0 \in \tilde{U}$, die folgende Eigenschaften haben:

1. Zu jedem $y \in \tilde{U}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $(x, y) \in U$ und $f(x, y) = 0$
2. Definiert man $g : \tilde{U} \to \mathbb{R}^n$, indem man $g(y)$ das eindeutig bestimmte x aus 1 setzt, so gilt $g(y_0) = x_0$, $f(g(y), y) = 0$ $(y \in \tilde{U})$ und $g \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^n)$. Ferner gilt $g'(y_0) = -(A_x)^{-1} A_y$

Bem. Die Gleichung $f(x, y) = 0$ im obigen Satz kann als System von n Gleichungen in $n + m$ Variablen aufgefaßt werden:

$$\begin{aligned} f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_m) &= 0 \end{aligned}$$

Die Voraussetzung, daß A_x invertierbar ist, bedeutet, daß die Matrix

$$\begin{pmatrix} (D_1 f_1)(x_0, y_0) & \cdots & (D_n f_1)(x_0, y_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (D_n f_m)(x_0, y_0) & \cdots & (D_n f_m)(x_0, y_0) \end{pmatrix} = A_x$$

invertierbar ist.

Bsp.

- Sei $f : \mathbb{R}^{1+1} \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^2 + y^2 + 1$, $(x_0, y_0) := (1, 0)$. Es gilt

  $$f'(x, y) = (2x, 2y) \qquad f'(1, 0) = (2, 0) = (A_x, A_y)$$

  $A_x = f_x(1, 0) = 2 \neq 0$ ist invertierbar. Durch $f(x, y) = 0$ ist eine Funktion $g : \tilde{U} \to \mathbb{R}$ implizit durch

  $$g(y) = \sqrt{1 - y^2}$$

  definiert.

- Sei $f : \mathbb{R}^{2+3} \to \mathbb{R}^2$ mit

  $$f(x, y, u, v, w) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x + yu - 4v + 3 \\ y \cos x - 6x + 2u - w \end{pmatrix}$$

  Es gilt $f(0, 1, 3, 2, 7) = 0$, $f \in C^1(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^1)$.

  $$\begin{aligned} f'(x, y, u, v, w) &= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^x & u & y & -4 & 0 \\ -y \sin x - 6 & \cos x & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ f'(\underbrace{0, 1}_{=:x_0}, \underbrace{3, 2, 7}_{=:y_0}) &= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -4 & 0 \\ -6 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

  $A_{(x,y)} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist invertierbar, $\det A_{(x,y)} = 20 \neq 0$. Der Satz über implizit definierte Funktionen liefert die Existenz einer Umgebung $\tilde{U}$ von $(3, 2, 7)$ und einer Funktion $g \in C^1(\tilde{U}, \mathbb{R}^2)$ mit $g(3, 2, 7) = (0, 1)$ und

  $$f(g(u, v, w), u, v, w) = 0 \quad \text{auf } \tilde{U}$$

  Es gilt

  $$\begin{aligned} g'(3, 2, 7) &= -(A_{(x,y)})^{-1}(A_{(u,v,w)}) \\ &= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/4 & 1/5 & -3/20 \\ -1/2 & 6/5 & 1/10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

10 Ableitungen höherer Ordnung

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Def. 18 Es sei f auf D partiell differenzierbar mit den partiellen Ableitungen $D_1 f, \dots, D_n f$. Sind die Funktionen $D_j f$ partiell differenzierbar, so sind die partiellen Ableitungen *zweiter Ordnung* von f definiert durch

$$D_{ij} f := f_{\xi_j \xi_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j} = D_i(D_j f).$$

Entsprechend werden höhere partielle Ableitungen definiert. f heißt k-mal stetig partiell differenzierbar auf D $:\Longleftrightarrow$ Alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ von f existieren und sind stetig auf D. Es seien

$$\begin{aligned}
C^k(D,\mathbb{R}) &:= \{f : D \to \mathbb{R} : f \text{ ist } k\text{-mal stetig differenzierbar auf } D\}, \\
C^k(D,\mathbb{R}^m) &:= \{f = (f_1,\dots,f_n), D \to \mathbb{R}^m, f_j \in C^k(D,\mathbb{R}) \ (j = 1,\dots,n)\}, \\
C^0(D,\mathbb{R}^m) &:= C(D,\mathbb{R}^m), \\
C^\infty(D,\mathbb{R}^m) &:= \bigcap_{k \geq 0} C^k(D,\mathbb{R}^m)
\end{aligned}$$

Bem. Die frühere Definition von $C^1(D,\mathbb{R}^m)$ stimmt mit obiger überein.

Bsp.

- Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = xy^2 \sin z$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&f_x(x,y,z) = y^2 \sin z, && f_y(x,y,z) = 2yx \sin z, \\
&f_{xy}(x,y,z) = 2y \sin z, && f_{yx}(x,y,z) = 2y \sin z, \\
&f_{xx}(x,y,z) = 0, && f_{xyz}(x,y,z) = 2y \cos z.
\end{aligned}$$

- Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

  Es gilt: f_x, f_y sind auf $\mathbb{R}^2$ definiert und

$$f_{xy}(0,0) = -1, \qquad fyx(0,0) = +1$$

Satz 31 (Satz von Schwarz) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^2(D,\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $i,j \in \{1,\dots,n\} : D_{ij} f = D_{ji} f$.

Bem. Insbesondere folgt aus obigem Satz: Ist $f \in C^k(D,\mathbb{R})$, so kommt es bei der Bildung einer Partiellen Ableitung von f nicht auf die Reihenfolge der Differenitation an.

Bsp. Sei $f \in C^3(D,\mathbb{R})$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Wegen $f_x \in C^2(D,\mathbb{R})$ gilt

$$f_{xxy} = (f_x)_{xy} = (f_x)_{yx} = f_{xyx} = (f_{xy})_x = (f_{yx})_x = f_{yxx}.$$

11 Der Satz von Taylor

Bezeichnungen: Sei $p := (p_1, \ldots, p_n) \in (\mathbb{N}_0)^n$ (*Multiindex*). Dann sei $|p| := \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ und $p! := \prod\limits_{i=1}^{n} (p_i!)$. Für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ sei $x^p := \prod\limits_{i=1}^{n} (\xi_i^{p_i})$. Für eine Funktion $f \in C^{|p|}(D, \mathbb{R})$ sei $D^p f := D_1^{p_1} D_2^{p_2} \ldots D_n^{p_n} f$

Satz 32 Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen, $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(D, \mathbb{R})$. Weiter sei $x \in D$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so, daß $s(x, x+h) \subseteq D$. Es sei $\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = f(x + th)$. Dann gilt: $\Phi \in C^k([0,1], \mathbb{R})$ und

$$\Phi^{(\nu)}(t) = \sum_{|p|=\nu} \frac{\nu!}{p!}(D^p f)(x+th)h^p \quad (\nu = 0, 1, \ldots k)$$

Satz 33 (Satz von Taylor) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{k+1}(D, \mathbb{R})$, $x \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$ so, daß $s(x, x+h) \subseteq D$. Dann gibt es genau ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$f(x+h) = \underbrace{\sum_{|p| \leq k} \frac{(D^p f)(x)}{p!} h^p}_{\substack{\text{Taylor-Polynom} \\ k\text{-ter Ordnung}}} + \underbrace{\sum_{|p|=k+1} \frac{(D^p f)(x + \theta h)}{p!} h^p}_{\text{Restglied}}$$

12 Extremwerte

Def. 19 Sei $f \in C^2(D, \mathbb{R})$, $x_0 \in D$.

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{\xi_1\xi_1}(x_0) & \cdots & f_{\xi_1\xi_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{\xi_n\xi_1}(x_0) & \cdots & f_{\xi_n\xi_n}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_{\xi_1}(x_0) \\ \vdots \\ \text{grad } f_{\xi_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

heißt Hesse-*Matrix* von f an der Stelle x_0.

Bem. Wegen $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ ist nach dem Satz von Schwarz $H_f(x)$ $(x \in D)$ stets symmetrisch.

Def. 20 Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. $f : M \to \mathbb{R}$ hat in $x_0 \in M$ ein lokales *Maximum* [*Minimum*] $:\Longleftrightarrow$

$$\exists \quad \delta > 0 \quad \forall \quad x \in M \cap U_\delta(x_0) : \qquad f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)].$$

f hat in x_0 ein lokales *Extremum*, wenn f in x_0 ein lokales Maximum oder Minimum hat.

Satz 34 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \to \mathbb{R}$ habe in x_0 ein lokales Extremum und sei in x_0 partiell differenzierbar. Dann gilt

$$(\text{grad } f)(x_0) = 0$$

Bem. Aus $(\text{grad } f)(x_0) = 0$ folgt im Allgemeinen nicht, daß f in x_0 ein lokales Extremum besitzt.

Bsp. Sei $f(x,y) := xy$. Dann gilt:

$$(\text{grad } f)(x,y) = (y,x) \qquad \Longrightarrow \qquad (\text{grad } f)(0,0) = (0,0).$$

Für $x \neq 0$ gilt aber

$$f(x,x) = x^2 > 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,-x) = -x^2 < 0$$

Damit kann f in $x_0 = (0,0)$ kein Extremum besitzen.

Def. 21 Sei $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{nn}$ symmetrisch. Die Abbildung $Q_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $Q_A(x) := x(Ax)$ heißt die zu A gehörende *quadratische Form*. Sie heißt *positiv definit*, wenn gilt

$$Q_A(x) > 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

sie heißt *negativ definit*, wenn gilt

$$Q_A(x) < 0 \qquad (x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$$

und sie heißt *indefinit*, wenn gilt

$$\exists \quad u,v \in \mathbb{R}^n : \qquad Q_A(u) < 0 \quad \wedge \quad Q_A(v) > 0$$

Bem.

- Sei $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$Q_A(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

- Allgemein gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist positiv definit} &\iff \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind positiv} \\ A \text{ ist negativ definit} &\iff \text{Alle Eigenwerte von } A \text{ sind negativ} \\ A \text{ ist indefinit} &\iff \text{Es gibt mindestens einen positiven und} \\ & \ \ \text{einen negativen Eigenwert von } A \end{aligned}$$

- A ist positiv definit $\iff -A$ ist negativ definit

- Es gilt

$$Q_a(\alpha x) = \alpha^2 Q_A(x) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n)$$

Satz 35 Es sei $A \in \mathbb{R}^{nn}$ eine symmetrische Matrix. Dann gilt:

1. A ist positiv [negativ] definit $\iff$

$$\exists \quad c > 0 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}^n : \qquad Q_A(x) \geq c||x||^2 \quad [Q_A(x) \leq -c||x||^2]$$

2. A sei positiv definit [negativ definit, indefinit]. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle symmetrischen Matrizen $B \in \mathbb{R}^{nn}$ mit $|||A - B||| \leq \varepsilon$ gilt, daß, B positiv definit [negativ definit, indefinit] ist. Ist A indefinit, so gilt zusätzlich: Es gibt $u, v \in \mathbb{R}^n$ mit $Q_B(u) > 0 \wedge Q_B(v) < 0$ für jede Matrix B mit $|||B - A||| \leq \varepsilon$

Satz 36 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in D$ mit grad $f(x_0) = 0$. Dann gilt

1. $H_f(x_0)$ ist positiv definit $\Longrightarrow$ f hat in x_0 ein lokales Minimum
2. $H_f(x_0)$ ist negativ definit $\Longrightarrow$ f hat in x_0 in lokales Maximum
3. $H_f(x_0)$ ist indefinit $\Longrightarrow$ f hat in x_0 kein lokales Extremum

Bem. $H_f(x_0)$ kann im Fall $n = 1$ nicht indefinit sein.

Bem. Ist $A \in \mathbb{R}^{nn}$ eine symmetrische Matrix mit $Q_A(x) \geq 0$ [$Q_A(x) \leq 0$] ($x \in \mathbb{R}^n$), so nennt man A positiv [negativ] *semidefinit.* Aus $f \in C^2(D, \mathbb{R})$ folgt mit grad $f(x_0) = 0$ und $H_f(x_0)$ semidefinit nicht, daß x_0 eine Extremalstelle ist. In diesem Fall kann alles mögliche eintreten.

Bsp. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (x + y)^3 - 6xy$.

$$\begin{aligned} & \text{grad } f(x,y) = (3(x+y)^2 - 6y, 3(x+y)^2 - 6x) = (0,0) \\ \Longleftrightarrow \quad & (x,y) = (0,0) \ \vee \ (x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6(x+y) & 6(x+y) - 6 \\ 6(x+y) - 6 & (x+y) \end{pmatrix}$$

Damit gilt

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det H_f(0,0) = -36$$

Damit ist $H_f(0,0)$ indefinit und f hat in $(0,0)$ kein lokales Extremum. Weiter gilt

$$H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = +36$$

Damit ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit, also hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

13 Extremwerte unter Nebenbedingungen

In diesem Paragraphen seien $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $m < n$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $\varphi : D \to \mathbb{R}^m, \varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ differenzierbare Funktionen. T sei die *Nullstellenmenge* von φ, also

$$T := \{x \in D : \varphi(x) = 0\}$$

Def. 22 f hat in $x_0 \in D$ ein lokales Maximum [Minimum] unter der *Nebenbedingung* $\varphi = 0$, wenn gilt $x_0 \in T$ und es gibt ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x_0) \subseteq D$ und $f(x) \leq f(x_0)$ [$f(x) \geq f(x_0)$] ($x \in U_\delta(x_0) \cap T$). Weiter definiert man eine Hilfsfunktion $H : D\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ mit

$$H(x, \lambda) := f(x) + \lambda\varphi(x)$$

Bem. $D\mathbb{R}^m$ ist eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{n+m}$. Es gilt

$$H'(x,\lambda) = \text{grad } H(x,\lambda) = (f'(x) + \lambda\varphi'(x), \varphi(x))$$

Satz 37 (Multiplikatorenregel von LAGRANGE) Es seien $f \in C^1(D,\mathbb{R})$ und $\varphi \in C^1(D,\mathbb{R}^m)$. f habe in $x_0 \in D$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ und es sei Rang $\varphi'(x_0) = m$. Dann existiert ein $\lambda_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $H'(x_0,\lambda_0) = 0$

Bsp. Sei $D = (0,\infty)^3$, $f : D \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$. $\varphi : D \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x,y,z) = xyz - 32$. Definiere $H : D\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$H(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda\varphi(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz + \lambda(xyz - 32)$$

Es gilt Rang $\varphi'(x,y,z) = 1$ $((x,y,z) \in D)$.

$$H'(x,y,z,\lambda) = \begin{pmatrix} y + 2z + \lambda yz \\ x + 2z + \lambda xz \\ 2x + 2y + \lambda xy \\ xyz - 32 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die eindeutige Lösung dieses Gleichungssystems lautet $(4,4,2)$. Damit ist dies die einzige Stelle, an der ein Extremum von f unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$ vorliegen könnte. Es gilt

$$f(4,4,2) = 16 + 28 + 28 = 48$$

Betrachte K mit

$$K := \{(x,y,z) \in D : \quad \varphi(x,y,z) = 0 \ \wedge x \leq r, y \leq r, z \leq r\}$$

mit $r = 128$. K ist kompakt. Sei $(x,y,z) \in T \setminus K$. Dann gilt

$$x > r \quad \vee \quad y > r \quad \vee \quad z > r.$$

1. Fall: $x > r$. Dann gilt

$$yz = \frac{32}{x} < \frac{32}{r} = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad y < \frac{1}{2} \ \vee \ z < \frac{1}{2}$$

2, 3. Fall: $y > r, z > r$ analog.
Da K kompakt ist, existiert $\min f(K)$. Wegen obiger Rechnung existiert auch $\min f(T)$ und es gilt $\min f(T) = \min f(K)$. Damit besitzt f eine Minimalstelle unter der Nebenbedingung $\varphi = 0$. $(4,4,2)$ ist die einzige Stelle, die dafür in Frage kommt. Somit gilt:

$$\min f(T) = f(4,4,2) = 48.$$

14 Wege

Def. 23 Eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $([a,b] \subseteq \mathbb{R})$ heißt *Weg*. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg.

$$\Gamma := \Gamma_\gamma := \gamma([a,b])$$

heißt der zum Weg γ gehörende *Bogen*. Γ ist kompakt. $\gamma(a)$ heißt *Anfangspunkt* von γ, $\gamma(b)$ heißt *Endpunkt* von γ. $[a,b]$ heißt *Parameterintervall* von γ. γ ist „orientiert", d.h. $\gamma(t_1)$ kommt vor $\gamma(t_2)$, wenn $t_1 < t_2$.

Bsp.

- Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und
$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n, \qquad \gamma(t) = x_0 + t(y_0 - x_0).$$
Es gilt $\Gamma = s(x_0, y_0)$, $\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = y_0$
- Sei $r > 0$ und
$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$$
Dann ist
$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = r^2\}, \qquad \gamma(0) = \gamma(2\pi) = (r, 0)$$
- Seien γ, r wie im obigen Beispiel und
$$\tilde{\gamma} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = (r\cos t, r\sin t)$$
Dann gilt $\Gamma_{\tilde{\gamma}} = \Gamma_\gamma$.
- Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und
$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R} \qquad \gamma(t) = (t, f(t))$$
Dann ist Γ der Graph von f.

Bem. Zum Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit
$$\gamma^-(t) = \gamma(a + b - t)$$
der *inverse* Weg.

Def. 24 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg und $Z := \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$.
$$L(\gamma, Z) := \sum_{k=1}^{m} ||\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})||.$$
Der Weg γ heißt *rektifizierbar*, wenn gilt:
$$\exists \quad M \geq 0 \quad \forall \quad \text{Zerl. } Z \text{ von } [a,b] : \qquad L(\gamma, Z) \leq M$$
In diesem Fall heißt
$$L(\gamma) := \sup_{Z \text{ Zerl.}} \{L(\gamma, Z)\}$$
die *Länge* des Weges γ.

Satz 38 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Dann gilt:
$$\gamma \text{ ist rektifizierbar} \quad \Longleftrightarrow \quad \gamma_j \in BV([a,b], \mathbb{R}) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Bem. Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg, so folgt, daß für $[c,d] \subseteq [a,b]$ auch $\tilde{\gamma} : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ mit $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(t)$ ein rektifizierbarer Weg ist.

Bsp.

- Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n \qquad \gamma(t) = x_0 + t(y_0 - x_0)$$

Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ eine Zerlegung von $[0,1]$.

$$\begin{aligned} L(\gamma, Z) &= \sum_{k=1}^{m} ||\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|| \\ &= \sum_{k=1}^{n} (t_k - t_{k-1})||y_0 - x_0|| = ||y_0 - x_0|| \end{aligned}$$

Somit ist γ rektifizierbar und es gilt $L(\gamma) = ||y_0 - x_0||$

- Sei

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \qquad \gamma(t) = \begin{cases} (t \cos \frac{\pi}{t}, t^2) & t \in (0,1] \\ (0,0) & t = 0 \end{cases}$$

γ ist ein Weg, aber γ ist nicht rektifizierbar, da die erste Komponentenfunktion nicht von beschränkter Variation ist

Def. 25 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg. Dann heißt

$$s(t) := \begin{cases} L(\gamma|_{[a,t]}) & t \in (a,b] \\ 0 & t = a \end{cases}$$

die *Weglängenfunktion* des Weges γ

Def. 26 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$

$$\int_a^b \gamma(t)dt := \left(\int_a^b \gamma_1(t)dt, \ldots, \int_a^b \gamma_n(t)dt \right)$$

Satz 39 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Dann gilt:

$$|| \int_a^b \gamma(t)dt|| \leq \int_a^b ||\gamma(t)||dt$$

Satz 40 Sei $\gamma \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. Dann gilt:

1. γ ist rektifizierbar
2. $s \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ und $s'(t) = ||\gamma'(t)||$
3. $L(\gamma) = \int_a^b ||\gamma'(t)||dt$

Bsp.

- Sei $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ Dann ist

$$s(t) = \int\limits_0^t ||\gamma'(\tau)||d\tau = \int\limits_0^t ||(-\sin\tau, \cos\tau)||d\tau = \int\limits_0^t 1dt = t$$

  Insbesondere gilt damit $L(\gamma) = s(2\pi) = 2\pi$.

- Se $f \in C^1([a, b], \mathbb{R})$ und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\gamma(t) = (t, f(t))$ Dann ist

$$L(\gamma) = \int\limits_a^b ||\gamma'(t)||dt = \int\limits_a^b ||(1, f'(t))||dt = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}dt$$

  ein Maß für die Länge eines Funktionsgraphen.

Def. 27 Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *stückweise* stetig differenzierbar, wenn gilt: Es gibt eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[a, b]$ mit

$$\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k], \mathbb{R}^n) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Bsp. Sei $\gamma : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t, |t|)$. γ ist stückweise stetig differenzierbar: Wähle z.B. $Z := \{-1, 0, 1\}$

Bem. Sückweise stetig differenzierbare Wege sind rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma_1) + \cdots + L(\gamma_m) = \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} ||\gamma_k'(t)||dt.$$

Def. 28 Seien $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ Wege. Man sagt $\gamma_1 \sim \gamma_2$, wenn es eine stetige, bijektive, wachsende Funktion $h : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ gibt mit $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$. In diesem Fall heißt h *Parametertransformation.*

Bem.

- Die Eigenschaften von h implizieren, daß h streng wachsend ist und daß gilt $h(a) = \alpha, h(b) = \beta$.
- Ist $\gamma_1 \sim \gamma_2$, so ist $\Gamma_{\gamma_1} = \Gamma_{\gamma_2}$
- „$\sim$“ ist eine Äquivalenzrelation.
- γ_1, γ_2 haben dieselbe Orientierung.

Bsp. Seien $x_0, y_0 \in \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \qquad & \gamma_1(t) &= x_0 + t^2(y_0 - x_0) \\ \gamma_2 &: [0, 1] \to \mathbb{R}^n, \qquad & \gamma_2(t) &= x_0 + t(y_0 - x_0) \end{aligned}$$

Hier ist $\gamma_1 \sim \gamma_2$, denn $h : [0, 1] \to [0, 1]$ mit $h(t) = t^2$ ist stetig, bijektiv und wachsend, und es gilt $\gamma_1 = \gamma_2 \circ h$.

Def. 29 Ein Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ heißt *glatt*, wenn gilt $\gamma \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ und $\gamma'(t) \neq 0$ $(t \in [a,b])$.

Satz 41 $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ seien Wege. Es gelte $\gamma_1 \sim \gamma_2$. $h : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ sei eine Parametertransformation. Dann gilt:

1. γ_1 ist rektifizierbar $\Longleftrightarrow$ γ_2 ist rektifizierbar.
   In diesem Fall ist $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$

2. Sind γ_1, γ_2 glatt, so ist $h \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ und $h'(t) > 0$ $(t \in [a,b])$.

Satz 42 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg und $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ die zugehörige Weglängenfunktion. Dann ist s wachsend und stetig auf $[a,b]$.

Satz 43 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg und $\tilde{\gamma}$ die Parameterdarstellung von Γ_γ mit der Weglänge als Parameter. Dann gilt: $\tilde{\gamma}$ ist glatt und $||\tilde{\gamma}'(t)|| = 1$ $(t \in [0, L(\gamma)])$.

Bem. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein glatter Weg und $t_0 \in [a,b]$. $\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)$ ist anschaulich der Vektor, der $\gamma(t_0)$ mit $\gamma(t_0 + h)$ verbindet. Der Vektor

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t_0 + h) - \gamma(t_0)}{h}$$

heißt *Tangentenvektor* an $\gamma(t_0)$. Die Tangente an $\gamma(t_0)$ hat die Gleichung

$$t : x = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0) \qquad (\in \mathbb{R})$$

Ist $\tilde{\gamma}$ ein weiterer glatter Weg mit $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, also $\gamma = \tilde{\gamma} \circ h$, so ist $h \in C^1([a,b],[a,b])$ und es gilt

$$\gamma'(t_0) = \tilde{\gamma}'(h(t_0))h'(t_0)$$

15 Wegintegrale

Def. 30 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, ein rektifizierbarer Weg und $f \in C(\Gamma_\gamma, \mathbb{R}^n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

$$\int_\gamma f(x)dx := \int_\gamma f(x)dx := \int_\gamma \sum_{j=1}^n f_j(x)d\xi_i := \sum_{j=1}^n \int_a^b f_j(\gamma(t))d\gamma_j(t) \quad (\in \mathbb{R})$$

heißt *Wegintegral* von f längs γ. Desweiteren definiert man

$$\int_\gamma f_j(x)d\xi_j := \int_a^b f_j(\gamma(t))d\gamma_j(t) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Bsp. Seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(t) = (t, t^2, t), \qquad f(x,y,z) = (z,y,x)$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_\gamma f(x,y,z)d(x,y,z) &= \int\limits_\gamma (zdx + ydy + xdz) \\
&= \int\limits_0^1 tdt + \int\limits_0^1 t^2dt^2 + \int\limits_0^1 tdt \\
&= \frac{1}{2} + \int\limits_0^1 t^2(2t)dt + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Satz 44 Sei $\gamma : [a,b] \in \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg und $f, g : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

1. $$\int\limits_\gamma (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int\limits_\gamma f(x)dx + \beta \int\limits_\gamma g(x)dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

2. $$\int\limits_\gamma f(x)dx = \int\limits_{\gamma|_{[a,c]}} f(x)dx + \int\limits_{\gamma|_{[c,b]}} f(x)dx \quad (c \in [a,b])$$

3. $$\int\limits_{\gamma^-} f(x)dx = -\int\limits_\gamma f(x)dx$$

4. $$\left| \int\limits_\gamma f(x)dx \right| \leq \left(\max_{x \in \Gamma_\gamma} ||f(x)|| \right) L(\gamma)$$

Satz 45 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ ein stetig differenzierbarer Weg und $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig. Dann gilt:

$$\int\limits_\gamma f(x)dx = \int\limits_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

Bem. Es seien $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg und $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ eine Zerlegung von $[a,b]$ mit

$$\gamma_k := \gamma|_{[t_{k-1}, t_k]} \in C^1([t_{k-1}, t_k), \mathbb{R}^n) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

so gilt

$$\int\limits_\gamma f(x)dx = \sum_{k=1}^n \int\limits_{\gamma_k} f(x)dx$$

Satz 46 $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $\tilde{\gamma} : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}^n$ seien rektifizierbare Wege mit $\gamma \sim \tilde{\gamma}$, $\Gamma := \Gamma_\gamma = \Gamma_{\tilde{\gamma}}$. Ist $f \in C(\Gamma, \mathbb{R}^n)$, so gilt

$$\int\limits_\gamma f(x)dx = \int\limits_{\tilde{\gamma}} f(x)dx$$

Def. 31 Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg, $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}$ stetig.

$$\int\limits_\gamma f(x)ds := \int\limits_a^b f(\gamma(t))ds(t)$$

heißt *Wegintegral* von f längs γ bezüglich der Weglänge.

Bem. Ist γ stetig differenzierbar, so ist $s \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ mit $s'(t) = ||\gamma'(t)||$ $(t \in [a,b])$. Somit gilt

$$\int\limits_\gamma f(x)ds = \int\limits_a^b f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt$$

Bsp. Seien $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ und $f : (0,\infty)^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) = (t,t^2), \qquad f(x,y) = \sqrt{1+x^2+3y}$$

Dann gilt wegen $\gamma'(t) = (1,2t)$:

$$\int\limits_\gamma f(x,y)ds = \int\limits_0^1 \sqrt{1+t^2+3t^2}\sqrt{1+4t^2}dt = \frac{7}{3}$$

16 Stammfunktionen

Def. 32 Eine Menge $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Gebiet*, wenn gilt: G ist offen und zu je zwei Punkten $x_0, y_0 \in G$ gibt es einen Weg $\gamma : [a,b] \to G$ mit $\gamma(a) = x_0$ und $\gamma(b) = y_0$.

Bem. Jede offene konvexe Menge ist ein Gebiet.

Def. 33 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion. $F : G \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu G, $:\Longleftrightarrow$ F ist auf G differenzierbar und es gilt

$$F'(x) \ (= \text{grad } F(x)) = f(x) \qquad (x \in G)$$

Bem.

- Im Fall $n = 1$ ist $G \subseteq \mathbb{R}$ genau dann ein Gebiet, wenn G ein offenes Intervall ist. In diesem Fall hat jede auf G stetige Funktion f eine Stammfunktion, nämlich für festes $x_0 \in G$ zum Beispiel $F : G \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = \int\limits_{x_0}^x f(t)dt$$

- Ist $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $F : G \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so ist $F'(x) = f(x)$ $(x \in G)$, also ist F' stetig auf G, damit gilt $F \in C^1(G, \mathbb{R})$

Bsp. Sei $G = \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (y, -x)$. Angenommen, f hat auf G eine Stammfunktion F. Dann gilt:

$$F'(x, y) = \text{grad } F(x, y) = (y, -x)$$

Insbesondere ist dann $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und nach dem Satz von SCHWARZ gilt $1 = F_{xy}(x, y) = F_{yx}(x, y) = -1$. Dies ist ein Widerspruch. Somit hat f keine Stammfunktion auf G.

Satz 47 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $x_0, y_0 \in G$ und $\gamma : [a, b] \to G$ ein Weg mit $\gamma(a) = x_0, \gamma(b) = y_0$. Dann existiert eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a, b]$, so daß gilt

$$s(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) \subseteq G \qquad (k = 1, \ldots n)$$

Bem. Insbesondere erhält man damit einen stückweise stetig differenzierbaren Weg in G, der x_0 mit y_0 verbindet.

Satz 48 Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $g : G \to \mathbb{R}$ eine auf G differenzierbare Funktion mit $g'(x) = 0$ $(x \in G)$. Dann ist g konstant auf G.

Bem.

- Sei $D := U_1((0, 0)) \cup U_1((3, 0)) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $g : D \to \mathbb{R}$ mit

  $$g(x) = \begin{cases} 1 & x \in U_1((0, 0)) \\ -1 & x \in U_1((3, 0)) \end{cases}$$

  D ist offen, aber kein Gebiet und g ist eine nicht konstante Funktion mit $g'(x) = 0$ $(x \in D)$. Die Voraussetzung ist also zwingend.

- Aus obigem Satz folgt: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{R}^n$ eine Funktion, die auf G eine Stammfunktion $F : G \to \mathbb{R}$ besitzt, so ist F bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.

Satz 49 (Integrabilitätsbedingung) Sei $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Besitzt f eine Stammfunktion auf G, so gilt

$$\frac{\partial f_j}{\partial \xi_k} = \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j} \qquad (j, k = 1, \ldots, n)$$

Bem. Die Umkehrung dieses Satzes ist im allgemeinen falsch.

Bsp. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x, y) = (y, x - y)$. Es gilt

$$\frac{\partial}{\partial y} y = 1 = \frac{\partial}{\partial x}(x - y)$$

Demnach könnte eine Stammfunktion F für f existieren. Für F müßte gelten:

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= y \qquad \Longrightarrow \qquad F(x, y) = xy + c(y) \\ F_y(x, y) &= x - y \end{aligned}$$

Also $x + c'(y) = x - y$. Damit gilt $c = -\frac{1}{2}y^2 + \tilde{c}$ und die Probe durch Ableiten bestätigt, daß F mit

$$F(x,y) = xy - \frac{1}{2}y^2$$

eine Stammfunktion von f auf $\mathbb{R}^2$ ist.

Satz 50 Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$ und $F : G \to \mathbb{R}^n$ eine Stammfunktion von f. Ist $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein stückweise stetig differenzierbarer Weg, so gilt

$$\int\limits_\gamma f(x)dx = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

d.h. $\int\limits_\gamma f(x)dx$ hängt nur von Anfangs- und Enpunkt von γ ab.

Def. 34 Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. $\int f(x)dx$ heißt in G *wegunabhängig* $:\Longleftrightarrow$ Für je zwei Punkte $x_0, y_0 \in G$ gilt: Für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg γ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$, $\gamma(a) = x_0$, $\gamma(b) = y_0$ hat $\int\limits_\gamma f(x)dx$ denselben Wert. In diesem Fall schreibt man

$$\int\limits_{x_0}^{y_0} f(x)dx \quad \text{statt} \quad \int\limits_\gamma f(x)dx$$

für jeden solchen Weg.

Satz 51 Sei $f \in C(G, \mathbb{R}^n)$. $\int f(x)dx$ sei wegunabhängig in G. Dann besitzt f eine Stammfunktion auf G. Eine solche ist z.B. $F : G \to \mathbb{R}$ mit

$$F(z) = \int\limits_{x_0}^{z} f(x)dx \qquad (x \in G)$$

mit festem $x_0 \in G$.

Satz 52 Ist G ein konvexes Gebiet und $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, so sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f besitzt auf G eine Stammfunktion
2. Die Integrabilitätsbedingung (Satz 49) ist erfüllt.
3. $\int f(x)dx$ ist wegunabhängig.

17 Quader

Def. 35 Für $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n), y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ definieren wir $x \leq y$, falls gilt $\xi_i \leq \eta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, und xy, falls gilt $\xi_i < \eta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $[\alpha, \alpha] := \{\alpha\}, (\alpha, \alpha) := (\alpha, \alpha] := [\alpha, \alpha) := \emptyset$. Für zwei Punkte $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), b = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a \leq b$ heißen

$$Q[a,b] := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad a \leq x \leq b\} = [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_n, \beta_n]$$

und

$$Q(a,b) := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad axb\} = (\alpha_1, \beta_1) \cdots (\alpha_n, \beta_n)$$

Quader. $Q[a,b]$ ist abgeschlossen, $Q(a,b)$ ist offen. Quader sind beschränkt und es gilt $(a \leq b)$

1. $Q(a,b) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, j_0 \in \{1, \ldots, n\} : \ \alpha_{j_0} = \beta_{j_0}$
2. $Q(a,b) = Q[a,b]^0$, $\partial Q[a,b] = Q[a,b] \setminus Q(a,b)$
3. $Q[a,b] = \overline{Q(a,b)}$

Es heißt

$$|Q[a,b]| := \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - \alpha_j)$$

Inhalt des Quaders. Z heißt *Zerlegung*, wenn gilt: $Z = Z_1 \cdots Z_n$ mit Z_j ist Zerlegung des Intervalls $[\alpha_j, \beta_j]$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Bem. Die Relationen „$\leq$“ und „“ sind keine Ordnungsrelationen auf $\mathbb{R}^n$.

Satz 53 Sei Z eine Zerlegung eines Quaders $Q[a,b]$ und $Q_1, \ldots, Q_m$ die von Z erzeugten Teilquader, dann gilt:

$$|Q[a,b]| = \sum_{k=1}^{n} |Q_k| \qquad \text{und} \qquad Q[a,b] = \bigcup_{k=1}^{m} Q_k$$

Def. 36 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Quadersumme* $:\Longleftrightarrow$ Es existieren abgeschlossene Quader $Q_1, \ldots, Q_m$ mit

1. $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$
2. $Q_k^0 \cap Q_i^0 = \emptyset$ $(i,k = 0, \ldots, m,\ i \neq k)$

Ist S eine Quadersumme, so heißt $|S| := \sum\limits_{k=1}^{m} Q_k$ der *Inhalt* von S.

Bem. Diese Definition ist unabhängig von der Darstellung von S durch Quader mit paarweise disjunktem Inneren

Satz 54

1. Sind $Q_1, \ldots, Q_m$ abgeschlossene Quader, so ist $S := \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$ eine Quadersumme, d.h. es existieren abgeschlossene Quader $\tilde{Q}_1, \ldots, \tilde{Q}_p$ mit paarweise disjunktem Inneren und $S = \bigcup\limits_{k=1}^{p} \tilde{Q}_k$. Weiter gilt $|S| = \sum\limits_{k=1}^{m} |Q_k|$.
2. Sind T, S Quadersummen mit $S \subseteq T$, so gilt $|S| \leq |T|$.

Sei

$$M := \{(\alpha,\beta), [\alpha,\beta), (\alpha,\beta], [\alpha,\beta] : \quad \alpha,\beta \in \mathbb{R}, \alpha \leq \beta\}$$

Die Menge R_n mit

$$R_n := \{I_1 \cdots I_n : \quad I_j \in M, j = 1, \ldots, n\}$$

heißt Menge aller *beschränkten Quader* im $\mathbb{R}^n$.

Satz 55 Seien $Q, \tilde{Q} \in R_n$. Dann gilt:

1. $Q \cap \tilde{Q} \in R_n$.
2. Es existieren endlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, \dots, Q_m \in R_n$ mit $Q \setminus \tilde{Q} = \bigcup\limits_{k=1}^{m} Q_k$

Satz 56 Es seien $Q_1, Q_2, \dots$ endlich oder abzählbar viele Quader aus R_n mit $M := \bigcup\limits_k Q_k$. Dann gibt es endlich oder abzählbar viele paarweise disjunkte Quader $\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots \in R_n$ mit $M = \bigcup\limits_k \tilde{Q}_k$.

Satz 57 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Dann existieren höchstens abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Quader $Q_1, Q_2, \dots \in R_n$ mit $D = \bigcup\limits_k Q_k$ und $\overline{Q_k} \subseteq D$ für alle k.

18 Das äußere Lebesgue-Maß

Def. 37 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. J_A sei die Menge aller endlichen oder abzählbar unendlichen Teilmengen $\{Q_k\}$ von R_n mit $A \subseteq \bigcup\limits_k Q_k$. Dann heißt

$$\lambda(A) := \inf(\sum_k |Q_k| : \quad \{Q_k\} \in J_A)$$

das *äußere* (Lebesgue-)*Maß* von A. Dabei sind $\sum\limits_k |Q_k| = \infty$ und $\lambda(A) = \infty$ zugelassen.

Bsp.

- Sei $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, $A = \{x\}$, also

  $$A = [\xi_1, \xi_1] \dots [\xi_n, \xi_n] \subseteq \mathbb{R}^n$$

  Dann gilt $\{A\} \in J_A$, $|A| = 0$. Daraus folgt $\lambda(A) = 0$

- Sei $n = 1$ und $A = \mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$. Sei $\varepsilon > 0$. Weiter sei

  $$Q_k := (r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}) \in R_1 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

  Es gilt $|Q_k| = \frac{\varepsilon}{2^k}$.

  $$A = \mathbb{Q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

  Damit gilt $\{Q_k\} \in J_A$ und aus

  $$\sum_{k=1}^{\infty} |Q_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

  folgt $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$

- Für eine Hyperebene $H \subseteq \mathbb{R}$ gilt $\lambda(H) = 0$.
- $\lambda(\emptyset) = 0$, $\lambda(\mathbb{R}^n) = \infty$
- Für einen Quader $Q \in R_n$ gilt $\lambda(Q) = |Q|$

Satz 58 Es gilt:

1. $\forall \quad A \subseteq \mathbb{R}^n : \qquad 0 \leq \lambda(A) \leq \infty$
2. $\forall \quad A, B \subseteq \mathbb{R}^n : \qquad A \subseteq B \implies \lambda(A) \leq \lambda(B)$
3. *σ-Subadditivität*: Ist (A_k) eine endliche oder abzählbare Folge von Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\lambda(\bigcup_k A_k) \leq \sum_k \lambda(A_k)$$

Bem. Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt, so ist $\lambda(A) < \infty$

Def. 38 $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge* $:\Longleftrightarrow \lambda(N) = 0$.

Bem. Sind $N_1, N_2, \ldots$ höchstens abzählbar unendlich viele Nullmengen, so ist $N := \bigcup\limits_k N_k$ ebenfalls eine Nullmenge

Bsp.

- $N := \{x\}$ ist eine Nullmenge ($x \in \mathbb{R}^n$)
- N ist abzählbar $\implies N$ ist Nullmenge
- Sei N Nullmenge und $\tilde{N} \subseteq N$. Dann ist $\tilde{N}$ Nullmenge.
- Hyperebenen sind Nullmengen

Def. 39 Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und (E) eine Eigenschaft von Punkten aus A. Es heißt (E) gilt *fast überall* auf A oder *für fast alle* $x \in A$, wenn gilt:

$$\{x \in A : \quad (E) \text{ gilt nicht für } x\}$$

ist eine Nullmenge.

Bsp.

- x ist irrational für fast alle $x \in \mathbb{R}$.
- Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : A \to \mathbb{R}$.

$$f > 0 \text{ f.ü. auf } A \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in A : \ f(x) \leq 0\} \text{ ist Nullmenge}$$

19 Das Lebesguesche Maß

Def. 40 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (Lebesgue-)*meßbar* $:\Longleftrightarrow$

$$\forall \quad E \subseteq \mathbb{R}^n : \qquad \lambda(E) = \lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus A))$$

Es sei $\mathcal{L} := \{A \in \mathbb{R}^n : \quad A \text{ ist meßbar}\}$.

Bsp.

- Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge, so gilt für $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} E \cap N \subseteq N \qquad &\Longrightarrow \qquad \lambda(E \cap N) = 0 \\ E \cap (\mathbb{R}^n \setminus N) \subseteq E \qquad &\Longrightarrow \qquad \lambda(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus N)) \leq \lambda(E) \end{aligned}$$

  Damit ist $N \in \mathcal{L}$. Nullmengen sind also meßbar.

- Sei $A = \mathbb{R}^n$. Dann gilt für $E \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\lambda(E \cap A) + \lambda(E \cap (\mathbb{R}^n \setminus A)) = \lambda(E) + \lambda(\emptyset) = \lambda(E)$$

  Damit ist $\mathbb{R}^n$ meßbar. Ebenso zeigt man $\emptyset \in \mathcal{L}$.

Def. 41 Für $A \in \mathcal{L}$ heißt $\lambda(A)$ das (Lebesgue*sche*) *Maß* oder *Volumen* von A.

Satz 59

1. $\mathcal{L}$ hat folgende Eigenschaften:
   (a) $A \in \mathcal{L} \Longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{L}$
   (b) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ paarweise disjunkt $\Longrightarrow \bigcup_k A_k \in \mathcal{L}$
   (c) $\mathbb{R}^n, \emptyset$ und jede Nullmenge liegen in $\mathcal{L}$
   (d) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L} \Longrightarrow \bigcap_k A_k, \bigcup_k A_k \in \mathcal{L}$
   (e) $A, B \in \mathcal{L} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{L}$
2. $\lambda : \mathcal{L} \to [0, \infty) \cup \{\infty\}$ hat folgende Eigenschaften:
   (a) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$ paarweise disjunkt

$$\Longrightarrow \qquad \lambda(\bigcup_k A_k) = \sum_k \lambda(A_k)$$

   (b) $A, B \in \mathcal{L}$, $B \subseteq A \Longrightarrow \lambda(A) = \lambda(A \setminus B) + \lambda(B)$
   (c) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \Longrightarrow \lambda(\bigcup_k A_k) = \lim_{k \to \infty} \lambda(A_k)$
   (d) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{L}$, $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$, $\lambda(A_1) < \infty$

$$\Longrightarrow \qquad \lambda(\bigcup_k A_k) = \lim_{k \to \infty} \lambda(A_k)$$

Satz 60 $R_n \subseteq \mathcal{L}$

Bem. Eine Menge, die Schnitt von höchstens abzählbar viele offenen Mengen ist, heißt G_δ*-Menge*.

20 Meßbare Funktionen

In diesem Paragraphen sei stets $M \in \mathcal{L}$. Für Funktionen $f, g, h : M \to \mathbb{R}$ sei

$$\{f < g\}_M := \{x \in M : \quad f(x) < g(x)\}.$$

Analog sind $\{f > g\}_M, \{f \le g\}_M, \{f \ge g\}_M, \{f \le g \le h\}_M, \ldots$ definiert.

Satz 61 Ist $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\{f \le t\}_M \in \mathcal{L}$ $(t \in \mathbb{R})$
2. $\{f < t\}_M \in \mathcal{L}$ $(t \in \mathbb{R})$
3. $\{f \ge t\}_M \in \mathcal{L}$ $(t \in \mathbb{R})$
4. $\{f > t\}_M \in \mathcal{L}$ $(t \in \mathbb{R})$

Def. 42 Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt (Lebesgue-)*meßbar* auf M, wenn gilt:

$$\forall \quad t \in \mathbb{R} : \qquad \{t \le f\}_M \in \mathcal{L}.$$

Es sei

$$\mathcal{L}(M) := \{f : M \to \mathbb{R} : \quad f \text{ ist meßbar auf } M\}$$

Bsp.

- Sei $n = 1$, $M = [0, 1]$ und $f : M \to \mathbb{R}$ definiert durch

  $$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

  Es gilt:

  $$\begin{array}{ll} \{f \le t\}_M = M = [0, 1] \in \mathcal{L} & (t \ge 1) \\ \{f \le t\}_M = [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \in \mathcal{L} & (t \in [0, 1)) \\ \{f \le t\}_M = \emptyset \in \mathcal{L} & (t < 0) \end{array}$$

  Damit gilt $\{f \le t\}_M \in \mathcal{L}$ $(t \in \mathbb{R})$. Also ist f meßbar.

- Sei $n = 1$, $M \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : M \to \mathbb{R}$ monoton. Für $t \in \mathbb{R}$ ist dann $\{f < t\}_M$ leer oder ein Intervall. Somit ist f meßbar auf M.

- Es sei $N \subseteq R^n$ eine Nullmenge und $f : N \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für $t \in \mathbb{R}$ ist $\{f < t\}_N \subseteq N$ stets eine Nullmenge, also ist f meßbar.

Satz 62 Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ Funktionen, $s, t \in \mathbb{R}$.

1. Aus $f, g \in \mathcal{L}(M)$ folgt $\{f \le g\}_M$, $\{f < g\}_M$, $\{f \ge g\}_M$, $\{f > g\}_M$, $\{t < [\le] f < [\le] s\}_M \in \mathcal{L}$.
2. Aus $B \subseteq M, B \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}(M)$ folgt $f \in \mathcal{L}(B)$.
3. Sind $B_1, B_2, \ldots$ endlich oder abzählbar viele Mengen aus $\mathcal{L}$ mit $M = \bigcup\limits_k B_k$ und ist $f \in \mathcal{L}(B_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, dann ist $f \in \mathcal{L}(M)$.

4. Sei $N \subseteq M$ eine Nullmenge, $h \in \mathcal{L}(M \setminus N)$. Aus $f|_{M\setminus N} = h$ folgt dann $f \in \mathcal{L}(M)$.

Satz 63 Für zwei Funktionen $f, g : M \to \mathbb{R}$ gelte $f = g$ fast überall auf M. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}(M) \qquad \Longleftrightarrow \qquad g \in \mathcal{L}(M)$$

Def. 43 Seien $f, g : M \to \mathbb{R}$ Funktionen. $(f \vee g), (f \wedge g) : M \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &:= \max\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in M)\\ (f \wedge g)(x) &:= \min\{f(x), g(x)\} \qquad (x \in M)\end{aligned}$$

Außerdem sei $f^+ := f \vee 0$ und $f^- := -(f \wedge 0)$

Satz 64

1. Seien $f_1, f_2, \ldots$ endlich oder abzählbar viele Funktionen in $\mathcal{L}(M)$. Für jedes $x \in M$ existiere

   $$\overline{H}(x) := \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k(x) \qquad [\text{bzw. } \underline{H}(x) := \inf_{k\in\mathbb{N}} f_k(x)]$$

   Dann gilt $\overline{H}$ $[\underline{H}] \in \mathcal{L}(M)$.

2. Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}(M)$ und für jedes $x \in M$ existiere

   $$\overline{h}(x) := \limsup_{k\to\infty} f_k(x) \qquad [\text{bzw. } \underline{h}(x) := \liminf_{k\to\infty} f_k(x)]$$

   Dann gilt $\overline{h}$ $[\underline{h}] \in \mathcal{L}(M)$.

3. Aus $f, g \in \mathcal{L}(M)$ folgt $f \wedge g, f \vee g, f^+, f^- \in \mathcal{L}(M)$

4. Ist (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}(M)$ und (f_k) konvergiere fast überall auf M gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$. Dann ist $f \in \mathcal{L}(M)$.

Satz 65

1. $f \in \mathcal{L}(M) \Longleftrightarrow$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}(U) \in \mathcal{L} \Longleftrightarrow$ Für alle abgeschlossenen Teilmengen $C \subseteq \mathbb{R}$ gilt $f^{-1}(C) \in \mathcal{L}$.

2. Ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $f \in \mathcal{L}(M)$, so ist $g \circ f \in \mathcal{L}(M)$

Satz 66

1. $\mathcal{L}(M)$ ist ein reeller Vektorraum.

2. $f, g \in \mathcal{L}(M) \implies fg \in \mathcal{L}(M)$

3. $f, g \in \mathcal{L}(M), g(x) \neq 0 \ (x \in M) \implies \frac{f}{g} \in \mathcal{L}(M)$

4. $f \in \mathcal{L}(M), p > 0 \implies |f|^p \in \mathcal{L}(M)$

Def. 44 Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Die Funktion $1_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus A \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion* von A. Es gilt

$$1_A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \mathcal{L}.$$

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn $f(\mathbb{R}^n)$ endlich ist. Es seien

$$T := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \quad f \text{ ist eine meßbare Treppenfunktion}\},$$
$$T_+ := \{f \in T : \quad f > 0\}$$

Bsp.

- $A \in \mathcal{L} \quad \Longrightarrow \quad 1_A \in T$
- Seien $B_1, B_2 \in \mathcal{L}$ mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ und $B := B_1 \cup B_2 \in \mathcal{L}$. Dann gilt $1_B = 1_{B_1} + 1_{B_2}$. Also: Für ein $f \in T$ ist die Darstellung

  $$f = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j 1_{A_j}$$

  nicht eindeutig.

Satz 67 Es sei $f \in \mathcal{L}(M)$ und $f(x) \geq 0$ $(x \in M)$. Dann existiert eine Folge (f_m) in T_+ mit

1. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \; (x \in M)$
2. $f_m(x) \xrightarrow{m \to \infty} f(x)$

21 Das Lebesgue-Integral

Satz 68 Sei $f \in T_+$, f habe eine Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k 1_{A_k} = \sum_{k=1}^{l} \beta_k 1_{B_k}$$

mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_l \geq 0$. Weiter sei $A_1, \ldots, A_m, B_1, \ldots, B_l \in \mathcal{L}$ und es gelte $A_i \cap A_k \neq \emptyset$ $(i \neq k)$ und $B_i \cap B_k \neq 0$ $(i \neq k)$. Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda(A_k) = \sum_{k=1}^{l} \beta_k \lambda(B_k)$$

Für diese Summen ist der Wert ∞ zugelassen.

Def. 45 Sei $f \in T_+$, f habe für geeignete $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ und $A_1, \ldots, A_m$ eine Darstellung

$$f = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k 1_{A_k}.$$

Dann wird definiert:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \lambda(A_k) \ (\geq 0)$$

Bsp. Sei $M \in \mathcal{L}$ und $f = 1_M \in T_+$. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} 1_M(x)dx = \lambda(M)$$

Satz 69 Es seien $f, g \in T_+, \alpha \geq 0$. Dann gilt:

1. $\alpha f, f+g \in T_+$ und

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha f(x)dx &= \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x)+g(x))dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \end{aligned}$$

2. Ist $f \leq g$ auf $\mathbb{R}^n$, so gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$$

3. Ist (f_k) eine Folge in T_+ mit $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$ und (f_k) konvergierte punktweise gegen f auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx.$$

Def. 46 Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $f \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \sup_{g\in T_+,\ g\leq f} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx \right\}$$

heißt (Lebesgue-) *Integral* von f über $\mathbb{R}^n$.

Satz 70 Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ und (f_k) eine Folge in T mit $f_1 \leq f_2 \leq \ldots$ auf $\mathbb{R}^n$ und $f_k(x) \xrightarrow{k\to\infty} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Satz 71 Seien $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $f, g \geq 0$ auf $\mathbb{R}^n$, $\alpha \geq 0$. Dann gilt:

1. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x) + g(x))dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx.$
3. Aus $f \leq g$ auf $\mathbb{R}^n$ folgt $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)dx$

Def. 47 Sei $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

1. Ist $f^+ \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ oder $f^- \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ so setze

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^+(x)dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^-(x)dx$$

   In diesem Fall sagen wir $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx$ *existiert.*

2. Ist $f^+ \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und $f^- \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ so ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \in \mathbb{R}.$$

   In diesem Fall heißt f (Lebesgue-)*integrierbar* über $\mathbb{R}^n$

3. Sei $M \in \mathcal{L}, f \in \mathcal{L}(M)$,

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x) & x \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   Dann ist $f_M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ und man definiert

$$\int\limits_M f(x)dx := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_M(x)dx,$$

   falls $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_M(x)dx$ existiert. f heißt (Lebesgue-) *integierbar* über $M :\Longleftrightarrow \int\limits_M f(x)dx < \infty$. $L(M)$ sei die Menge aller über M integrierbaren Funktionen.

Satz 72

1. $L(M)$ ist ein reller Vektorraum und die Abbildung $\Phi : \mathcal{L}(M) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\Phi(f) := \int\limits_M f(x)dx$$

   ist linear.

2. $f, g \in L(M), f \leq g$ auf $M \Longrightarrow$
$$\int_M f(x)dx \leq \int_M g(x)dx$$
3. $1_M \in L(M) \iff \lambda(M) < \infty$
4. Sei $f \in L(M)$ und $\sup\limits_{x\in M} |f(x)| < \infty$. Dann gilt:
$$\int_M |f(x)|dx \leq \lambda(M) \sup_{x\in M} |f(x)|$$

Satz 73 Sei $M \in \mathcal{L}, f, g \in \mathcal{L}(M)$. Dann gilt:

1. Ist M Nullmenge, so ist $f \in \mathcal{L}(M)$ und es gilt
$$\int_M f(x)dx = 0$$
2. $A \subseteq M, A \in \mathcal{L},\ f > 0$ auf M
$$\Longrightarrow \qquad \int_A f(x)dx \leq \int_M f(x)dx$$
3. $A \subseteq M,\ A \in \mathcal{L},\ f \in L(M) \Longrightarrow f \in L(A)$.
4. $f > 0$ auf M und $\int\limits_M f(x)dx = 0 \Longrightarrow M$ ist Nullmenge.
5. Es seien $M_1, M_2 \in \mathcal{L}$ disjunkte Mengen mit $M = M_1 \cup M_2$. Dann gilt $f \in L(M) \implies f \in L(M_1), f \in L(M_2)$ und
$$\int_M f(x)dx = \int_{M_1} f(x)dx + \int_{M_2} f(x)dx$$
6. Ist $f = g$ fast überall auf M, so gilt $f \in L(M) \iff g \in L(M)$. In diesem Fall gilt
$$\int_M f(x)dx = \int_M g(x)dx$$
Sind $f, g \geq 0$ und $f = g$ fast überall auf M, so gilt
$$\int_M f(x)dx = \int_M g(x)dx$$
7. Ist $f = 0$ fast überall auf M, so ist $f \in L(M)$ und
$$\int_M f(x)dx = 0$$

8. Ist $f \in L(M)$ und gilt $\int\limits_A f(x)dx = 0$ für jedes $A \subseteq M$ mit $A \in \mathcal{L}$, so ist $f = 0$ fast überall auf M.
9. Ist $f \in L(M), f \geq 0, \int\limits_M f(x)dx = 0$, so gilt $f = 0$ fast überall auf M.

Satz 74 Es sei $M \in \mathcal{L}$ und $f, g \in \mathcal{L}(M)$. Dann gilt:

1. $g \in L(M), g \geq 0$ auf M und $|f| \leq g$ fast überall auf $M \Longrightarrow f \in L(M)$
2. f beschränkt auf M und $\lambda(M) < \infty \Longrightarrow f \in L(M)$.

Satz 75 Ist M kompakt und $f \in C(M, \mathbb{R})$, so ist $f \in L(M)$.

22 Konvergenzsätze

In diesem Paragraphen sei stets $M \in \mathcal{L}$.

Satz 76 (Monotone Konvergenz) Sei $f \in \mathcal{L}(M)$ und (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}(M)$ mit $f, f_1, f_2, \ldots \geq 0$. Weiter gelte

1. (f_k) ist wachsend fast überall auf M.
2. $f_k \xrightarrow{k\to\infty} f$ fast überall auf M.

Dann gilt:

$$\int\limits_M f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_k(x)dx$$

Satz 77 (Satz von Beppo-Levi) Sei (f_k) eine Folge in $L(M)$, $f_k \geq 0$ auf M $(k \in \mathbb{N})$ und (f_k) sei wachsend fast überall auf M. Weiter sei die Folge

$$\left(\int\limits_M f_k(x)dx\right)_{k=1}^{\infty}$$

beschränkt. Dann konvergiert (f_k) fast überall auf M gegen ein $f \in \mathcal{L}(M)$ und es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_M f_k(x)dx = \int\limits_M f(x)dx$$

Satz 78 (Lemma von Fatou) Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}(M)$ und für jedes $x \in M$ existiere $\liminf\limits_{k\to\infty} f_k(x) \in \mathbb{R}$. Weiter sei $f_k \geq 0$ auf M $(k \in \mathbb{N})$. Dann gilt:

$$\int\limits_M \left(\liminf_{k\to\infty} f_k(x)\right) dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int\limits_M f_k(x)dx.$$

Satz 79 (Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz) $f \in \mathcal{L}(M)$, $g \in L(M)$ seien Funktionen mit $g \geq 0$ auf M und (f_k) sei eine Folge in $\mathcal{L}(M)$ mit

1. (f_k) konvergiert fast überall auf M gegen f.

2. $|f_k| \leq g$ fast überall auf M $(k \in \mathbb{N})$.

Dann gilt: $f, f_1, f_2, \dots \in L(M)$ und

$$\int_M f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_M f_k(x)dx$$

Satz 80 Sei (M_k) eine Folge in $\mathcal{L}$ mit $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots$ und $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$. Es gelte $f \in \mathcal{L}(M)$ und $f \in L(M_k)$ $(k \in \mathbb{N})$. Die Folge

$$\left(\int_{M_k} |f(x)|dx \right)_{k=1}^{\infty}$$

sei beschränkt. Dann ist $f \in L(M)$ und es gilt

$$\int_M f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_{M_k} f(x)dx$$

23 Riemann- und Lebesgue-Integral

In diesem Paragraphen sei $I := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Mit $\int_a^b f(x)dx$ sei das Riemann-Integral und mit $\int_I f(x)dx$ sei das Lebesgue-Integral gemeint. (Es gilt $I \in \mathcal{L}$).

Satz 81 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von $[a, b]$. m_j, M_j seien wie in Ana I. Für die Funktionen $g_Z, h_Z : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit

$$g_Z(x) := \begin{cases} m_1 & x = a \\ m_j & x \in (x_{j-1}, x_j] \end{cases}$$

$$h_Z(x) := \begin{cases} M_1 & x = a \\ M_j & x \in (x_{j-1}, x_j] \end{cases}$$

gilt dann $g_Z, h_Z \in L(I)$ und

$$\int_I g_Z(x)dx = \underline{s}_f(Z), \qquad \int_I h_Z(x)dx = \overline{s}_f(Z)$$

Satz 82 Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Z_n die äquidistante Zerlegung von $[a, b]$ mit 2^n Teilintervallen, $g_n := g_{Z_n}, h_n := h_{Z_n}$. Dann gilt:

1. $|Z_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq \dots$ sowie

$$g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq f \leq \dots \leq h_2 \leq h_1$$

2. Für $g(x) := \lim_{n\to\infty} g_n(x)$ und $h(x) := \lim_{n\to\infty} h_n(x)$ gilt $g \le f \le h$ auf I, $g, h \in L(I)$ und

$$\int_I g(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx, \qquad \int_I h(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

Satz 83 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Dann gilt:

1. $f \in R([a,b]) \iff f$ ist fast überall stetig auf $[a,b]$.
2. $f \in R([a,b]) \implies f \in L([a,b])$ und

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx$$

Bsp. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & x \in [a,b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Es gilt $f \notin R([a,b])$. Aber es gilt $f = 0$ fast überall auf I. Damit ist $f \in L(I)$ und es gilt

$$\int_I f(x)dx = 0$$

Satz 84 Sei $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter gelte $f \in R([a,t])$ $(t > a)$. Dann gilt

$$\int_a^\infty f(x)dx \text{ konv. abs.} \qquad \iff \qquad f \in L([a,\infty])$$

In diesem Fall gilt

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_{[a,\infty]} f(x)dx.$$

Bsp.

- Das Integral
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$$
ist konvergent, aber nicht absolut konvergent. Es gilt $\frac{\sin x}{x} \notin L([0,\infty])$. Das Integral existiert aber als uneigentliches RIEMANN-Integral.

- Das Integral
$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$
konvergiert absolut. Also gilt $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L((0,1])$.

- Das Integral

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

ist divergent. Also gilt $\frac{1}{x} \notin L((0,1))$. Zusammen mit dem vorhergehenden Beispiel folgt daraus, daß L bezüglich Multiplikation nicht abgeschlossen ist.

24 Der Satz von Fubini

Bezeichnungen: Es seien $n, p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$,

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p\mathbb{R}^q = \{(x,y): \quad x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q\}.$$

Sei $k \in \mathbb{N}, M \subseteq \mathbb{R}^k$. Wir schreiben $\mathcal{L}_k$ statt $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_k(M)$ statt $\mathcal{L}(M)$, $L_k(M)$ statt $L(M)$, $\lambda_k(M)$ statt $\lambda(M)$ und $||_k$ statt $||$ für den Inhalt von Quadern im $\mathbb{R}^k$.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n, x_0 \in \mathbb{R}^p, y_0 \in \mathbb{R}^q$.

$$M_{x_0} := \{y \in \mathbb{R}^q : \quad (x_0, y) \in M\}$$

heißt x_0-*Schnitt* von M,

$$M_{y_0} := \{x \in \mathbb{R}^p : \quad (x, y_0) \in M\}$$

heißt y_0-*Schnitt* von M.

Satz 85 Sei $M \in \mathcal{L}_n$. Dann gilt: $M_x \in \mathcal{L}_q$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^p$, $M_y \in \mathcal{L}_p$ für fast alle $y \in \mathbb{R}^q$, d.h. es existiert eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^p$ mit $M_x \in \mathcal{L}_q$ $(x \in \mathbb{R}^p \setminus N)$ und eine Nullmengen $\tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^q$ mit $M_y \in \mathcal{L}_p$ $(y \in \mathbb{R}^q \setminus \tilde{N})$

Bem. Diese Aussage ist offensichtlich, falls M offen oder abgeschlossen ist, da dann alle Schnitte offen oder abgeschlossen sind.

Satz 86 (Prinzip von Cavalieri) Es sei $M \in \mathcal{L}_n$, $\lambda_n(M) < \infty$. Dann existiert eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^q$ mit:
Die durch

$$F(y) := \begin{cases} \lambda_p(M_y) & y \in \mathbb{R}^q \setminus N \\ 0 & y \in N \end{cases}$$

definierte Funktion liegt in $L_q(\mathbb{R}^q)$ und für F gilt

$$\lambda_n(M) = \int_{\mathbb{R}^q} F(y) dy$$

also

$$\lambda_n(M) = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(M_y) dy = \int_{\mathbb{R}^q} \int_{\mathbb{R}^p} 1_M(x,y) dx\, dy$$

Bsp.

- Seien $n = 2, r > 0$ und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq r^2\}$. M ist kompakt. Sei $y \in \mathbb{R}$. Aus

$$x^2 = r^2 - y^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \sqrt{r^2 - y^2} \quad \vee \quad x = -\sqrt{r^2 - y^2}$$

folgt

$$\begin{aligned} M_y &= \{x \in \mathbb{R} : (x,y) \in M\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq r^2 - y^2\} \\ &= \begin{cases} \emptyset & r < |y| \\ [-\sqrt{r^2 - y^2}, \sqrt{r^2 - y^2}] & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lambda_1(M_y) = \begin{cases} 0 & r < |y| \\ 2\sqrt{r^2 - y^2} & r \geq |y| \end{cases}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \lambda_2(M) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_1(M) dy = \int\limits_{[-r,r]} 2\sqrt{r^2 - y^2} dy \\ &= \left[y\sqrt{r^2 - y^2} + r^2 \arcsin \frac{y}{r} \right]_{-r}^{r} = \pi r^2 \end{aligned}$$

- Sei $n = 3$ und

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 \leq z^2, \ z \in [0,1]\}$$

M ist kompakt. Sei $z \in \mathbb{R}$ Es gilt

$$M_z = \begin{cases} \emptyset & z < 0 \ \vee z > 1 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq z^2\} & z \in [0,1] \end{cases}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} \lambda_3(M) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z) dz = \int\limits_{[0,1]} \pi z^2 dz \\ &= \int\limits_0^1 \pi z^2 dz = \pi \left[\frac{1}{3} z^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

- Seien $n = 3, r > 0$ und

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$$

M ist kompakt. Es gilt

$$M_z = \begin{cases} \emptyset & |z| > r \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2 - z^2\} & |z| \leq r \end{cases}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}\lambda_3(M) &= \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_z)dz = \int\limits_{[-r,r]} \pi(r^2-z^2)dz \\ &= \pi\int\limits_{-r}^{r}(r^2-z^2)dz = \frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

- Sei $n = 3$ und

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 \leq \mathrm{e}^{-z},\ z \geq 0\}$$

M ist abgeschlossen und unbeschränkt. Betrachte M_k mit

$$M_k := M \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \leq k\} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Für $z < 0 \lor z > k$ ist $\lambda_2((M_k)_z) = 0$. Für $z \in [0,k]$ ist $\lambda_2((M_k)_z) = \pi\mathrm{e}^{-z}$. Damit gilt

$$\lambda_3(M_k) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_2((M_k)_z)dz = \int\limits_0^k \pi\mathrm{e}^{-z}dz = \pi(1-\mathrm{e}^{-k})$$

Es gilt $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ und $M = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} M_k$. Damit gilt:

$$\lambda_3(M) = \lim_{k\to\infty} \lambda_3(M_k) = \pi$$

- Rotationskörper im $\mathbb{R}^3$: Sei $f \in C([a,b],\mathbb{R}$ mit $f \geq 0$ und

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ y^2+z^2 \leq (f(x))^2\}$$

M ist kompakt. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$M_x = \begin{cases} \emptyset & x \in \mathbb{R}\setminus[a,b] \\ \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 :\ y^2+z^2 \leq f(x)^2\} & \text{sonst}\end{cases}$$

Also gilt

$$\lambda_2(M_x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}\setminus[a,b] \\ \pi(f(x))^2 & x \in [a,b]\end{cases}$$

Damit gilt:

$$\lambda_3(M) = \int\limits_{\mathbb{R}} \lambda_2(M_x)dx = \pi\int\limits_a^b f(x)^2dx$$

- Seien $n = 4, r > 0$ und

$$M = \{(x,y,z,u) \in \mathbb{R}^4 : \quad x^2+y^2+z^2+u^2 \leq r^2\}$$

M ist kompakt (M ist abgeschlossene Kugel im $\mathbb{R}^4$ mit Mittelpunkt $(0,0,0,0)$). Für $(z,u) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$M_{(z,u)} = \begin{cases} \emptyset & z^2+u^2 > r^2 \\ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2-z^2-u^2\} & z^2+u^2 \leq r^2\end{cases}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \lambda_4(M) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} \lambda_2(M_{zu}) d(z,u) \\ &= \int\limits_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq r^2-z^2-u^2\}} \pi(r^2-z^2-u^2) d(z,u) \end{aligned}$$

Dieses Integral ist mit den jetzigen Mitteln noch nicht berechenbar, Fortsetzung auf Seite 48.

Satz 87 (Satz von Fubini) Sei $f \in L_n(\mathbb{R}^n)$. Dann existiert eine Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}^q$ mit

1. Für alle $\in \mathbb{R}^q \setminus N$ liegt die Funktion $x \to f(x,y)$ in $L_p(\mathbb{R}^q)$

2. Für die durch

$$F(y) := \begin{cases} \int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx & y \in \mathbb{R}^q \setminus N \\ 0 & y \in N \end{cases}$$

definierte Funktion F gilt $F \in L_q(\mathbb{R}^q)$.

3. Es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y) d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^q} F(y) dy$$

Bem. Es gilt also unter den Voraussetzungen des Satzes von Fubini:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x,y)d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}^q}\int\limits_{\mathbb{R}^p} f(x,y)dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^p}\int\limits_{\mathbb{R}^q} f(x,y)dy\,dx$$

Bsp.

- Sei $n=2$, $M=[0,1][1,3]$ und $f : M \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x+y$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int\limits_M (x+y)d(x,y) &= \int\limits_1^3 \int\limits_0^1 (x+y)dx\,dy = \int\limits_1^3 \left[\frac{1}{2}x^2 + yx\right]_{x=0}^{x=1} dy \\ &= \int\limits_1^3 \left(\frac{1}{2}+y\right) dy = \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2\right]_1^3 = 5 \end{aligned}$$

- Sei $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq 1\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$f(x,y) = xy^2$. Sei $g := f_M$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_M f(x,y)d(x,y) &= \int\limits_{\mathbb{R}^2} g(x,y)d(x,y) = \int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y)dy\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y)dy\,dx = \int\limits_0^1 \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xy^2 dy\,dx \\
&= \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{3}xy^3\right]_{y=-\sqrt{x}}^{y=\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{\frac{5}{2}}dx = \frac{4}{21}
\end{aligned}$$

- Sei $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) := x$. Seien $g := f_M$ und

  $$\tilde{M} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x,y \geq 0, x+y \leq 1\}.$$

  Dann gilt:

  $$\begin{aligned}
  &\int\limits_M f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_{\mathbb{R}^3} g(x,y,z)d(x,y,z) \\
  &= \int\limits_{\mathbb{R}^2}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y,z)dz\,d(x,y) = \int\limits_{\tilde{M}}\int\limits_{\mathbb{R}} g(x,y,z)dz\,d(x,y) \\
  &= \int\limits_{\tilde{M}}\int\limits_0^{1-x-y} xdz\,d(x,y) = \int\limits_{\tilde{M}} [xz]_{z=0}^{z=1-x-y}\,d(x,y) \\
  &= \int\limits_{\tilde{M}} (x - x^2 - xy)d(x,y) = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} (x - x^2 - xy)dy\,dx = \frac{1}{24}
  \end{aligned}$$

25 Die Substitutionsregel

Satz 88 Seien $A, V \in \mathbb{R}^n$ mit $A \subseteq V, A \in \mathcal{L}$ und V offen. Es sei $g : V \to \mathbb{R}^n$ stetig, injektiv und differenzierbar auf A. Weiter sei $g(V \setminus A)$ eine Nullmenge. Dann ist $g(A) \in \mathcal{L}$ und für jede Funktion $f \in \mathcal{L}(g(A))$ mit $f \geq 0$ gilt:

1. $f \circ g|\det g'| \in \mathcal{L}(A)$
2. $\int\limits_{g(A)} f(x)dx = \int\limits_A f(g(x))|\det g'(x)|dx$

Bem.

- Aus $f \geq 0$ auf $g(A)$ folgt $f \circ g|\det g'| \geq 0$ auf A.
- Insbesondere ist zugelassen $V = A$. Dann ist $g(V \setminus A) = \emptyset$, also eine Nullmenge

- Der obige Satz gilt auch allgemeiner für Funktionen $f \in L(g(A))$.

Bsp.

- (Fortsetzung von Seite 46) Seien $r > 0$, $n = 2$. M und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$M = \{(z,u) \in \mathbb{R}^2 : z^2 + u^2 \leq r^2\}, \qquad f(z,u) = r^2 - z^2 - u^2$$

Wir verwenden *Polarkoordinaten*: Sei $A = V = (0,r)(0,2\pi)$. V ist offen. $g : V \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch

$$g(t,\varphi) := (t\cos\varphi, t\sin\varphi)$$

Es gilt

$$g(V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 < r^2\} \setminus \{(x,0) : x \in [0,r)\}$$

Weiter gilt $g \in C^1(V,\mathbb{R}^2)$ und g ist bijektiv. Es ist

$$M \setminus g(V) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\} \cup \{(x,0) : x \in [0,r]\}$$

eine Nullmenge. Weiter ist

$$\det g'(t,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -t\sin\varphi \\ \sin\varphi & t\cos\varphi \end{vmatrix} = t \geq 0$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int\limits_M (r^2 - z^2 - u^2)d(z,u) &= \int\limits_{g(V)} (r^2 - z^2 - u^2)d(z,u) \\
= &\int\limits_V (r^2 - t^2\cos^2\varphi - t^2\sin^2\varphi)|t|d(t,\varphi) \\
= &\int\limits_V (r^2 - t^2)|t|d(t,\varphi) = \int\limits_{\overline{V}} (r^2 - t^2)|t|d(t,\varphi) \\
= &\int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} (r^2 - t^2)t\,d\varphi\,dt = 2\pi\left[\frac{t^2}{2}r^2 - \frac{1}{4}t^2\right]_0^r = \frac{\pi}{2}r^4
\end{aligned}$$

Daraus folgt für das Volumen einer abgeschlossenen Kugel im $\mathbb{R}^4$:

$$\pi \int\limits_M (r^2 - z^2 - u^2)d(z,u) = \frac{\pi^2}{2}r^4$$

- Die Vorgehensweise im vorherigen Beispiel zeigt, daß allgemein gilt: Ist $r > 0$ und $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und $f \in L(M)$, so gilt:

$$\int\limits_M f(x,y)d(x,y) = \int\limits_0^r \int\limits_0^{2\pi} f(t\cos\varphi, t\sin\varphi)t\,d\varphi\,dt$$

- *Zylinderkoordinaten*:

$$g : (0,r)(0,2\pi)(\alpha,\beta) \to \mathbb{R}^3 \qquad g(t,\varphi,z) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

  Ist $r > 0$ und $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq r^2, \alpha \leq z \leq \beta\}$, so gilt wegen $\det g'(t,\varphi,z) = t$:

$$\int\limits_M f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_\alpha^\beta \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r f(t\cos\varphi, t\sin\varphi, z)tdt\,d\varphi\,dz$$

- *Kugelkoordinaten*:

$$g : (0,r)(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})(0,2\pi) \to \mathbb{R}^3 \qquad g(t,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\vartheta\cos\varphi \\ t\cos\vartheta\sin\varphi \\ t\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

  Ist $r > 0$ und $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2\}$, $f \in L(M)$, so gilt wegen $\det g'(t,\vartheta,\varphi) = -t^2\cos\vartheta < 0$:

$$\int\limits_M f(x,y,z)d(x,y,z) = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^r f(g(t,\vartheta,\varphi))t^2\cos\vartheta dt\,d\vartheta\,d\varphi$$

26 Absolut stetige Funktionen

In diesem Paragraphen betrachten wir stets $\mathbb{R}$.

Satz 89 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion. Dann gilt: f ist fast überall auf $[a,b]$ differenzierbar, d.h.

$$\{x \in [a,b] : \quad \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ existiert nicht}\}$$

ist eine Nullmenge.

Bem.

- Sei $f \in BV([a,b],\mathbb{R})$, so existieren monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f = f_1 - f_2$. Damit gilt: f ist fast überall auf $[a,b]$ differenzierbar.
- Es gibt Funktionen in $C([a,b],\mathbb{R})$, die an keiner Stelle differenzierbar sind.

Def. 48 Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt *absolut stetig* $:\Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ mit: Sind $(c_1,d_1),\ldots(c_m,d_m) \subseteq [a,b]$ paarweise disjunkt mit

$$\sum_{j=1}^m (d_j - c_j) < \delta$$

so ist

$$\sum_{j=1}^m |f(d_j) - f(c_j)| < \varepsilon$$

Bem. Absolut stetige Funktionen sind gleichmäßig stetig, also insbesondere stetig. Jede LIPSCHITZ-stetige Funktion ist absolut stetig.

Satz 90 Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig, so ist $f \in BV([a,b],\mathbb{R})$.

Bem. Insbesondere sind also absolut stetige Funktionen fast überall differenzierbar.

Satz 91 Ist $f \in L([a,b])$, so ist $f \in L([a,x])$ $(x \in [a,b])$ und die Funktion F mit

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist absolut stetig

Bem. Insbesondere ist damit F fast überall differenzierbar auf $[a,b]$.

Satz 92 Sei $f \in L([a,b])$ und F wie in Satz 91. Dann gilt: $F'(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [a,b]$, d.h.

$$\{x \in [a,b] : \quad F \text{ ist nicht differenzierbar in } x \text{ oder } F'(x) \neq f(x)\}$$

ist eine Nullmenge.

Bem.

- Kurzschreibweise: $\displaystyle\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$
- Es gibt wachsende (sogar stetige) Funktionen mit $f'(x) = 0$ fast überall auf $[a,b]$, für die aber gilt $f(b) - f(a) > 0$

Satz 93 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ wachsend. Dann existiert eine Nullmenge $N \subseteq [a,b]$ mit f ist differenzierbar auf $[a,b] \setminus N$ und g mit

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & x \in [a,b] \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

ist meßbar auf $[a,b]$ und es gilt

$$\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)$$

Satz 94 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ absolut stetig mit $f'(x) = 0$ fast überall auf $[a,b]$. Dann ist f konstant.

Satz 95 Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine absolut stetige Funktion. Dann existiert eine Nullmenge $N \subseteq [a,b]$ so, daß f auf $[a,b]$ differenzierbar ist und für die Funktion g mit

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & x \in [a,b] \setminus N \\ 0 & x \in N \end{cases}$$

gilt

1. $g \in L([a,b])$
2. $f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$ $(x \in [a,b])$

Index

W

Z