Topologie I

Manuel Kauers
nach einer Vorlesung von
Prof. Dr. H. Kuhn

21. Oktober 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Notationen und Grundlagen

Ziel der Topologie ist die Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffs aus der Analysis auf allgemeine Mengen. Statt $\mathbb{R}^n$ legen wir als *Grundmengen* beliebige Mengen zugrunde, die wir mit $X, Y, \ldots$ bezeichnen. Die Elemente dieser Mengen heißen *Punkte* und werden mit $x, y, \ldots$ notiert. Das *Komplement* von $A \subseteq X$ wird $A^{\complement} := X \setminus A$ geschrieben. Mengen, deren Elemente ihrerseits Mengen sind, bezeichnen wir als *Mengensysteme* oder kurz als *System*. Für Systeme verwenden wir die Symbole $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$. Mit $\emptyset$ sei die *leere Menge* und mit $\mathcal{P}(X)$ die *Potenzmenge* von X bezeichnet. Es gelte

$$\bigcup_{A \in \emptyset} A := \emptyset, \qquad \bigcap_{A \in \emptyset} A := X.$$

Im Übrigen gilt die übliche Nomenklatur.

Satz 1 Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, $A, B \subseteq X$. Dann gilt:

1. $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad f^{-1}(A) \subseteq f^{-1}(B)$
2. $f^{-1}(\bigcup\limits_{S \in \mathfrak{S}} S) = \bigcup\limits_{S \in \mathfrak{S}} f^{-1}(S)$
3. $f^{-1}(\bigcap\limits_{S \in \mathfrak{S}} S) = \bigcap\limits_{S \in \mathfrak{S}} f^{-1}(S)$
4. $f^{-1}(A^{\complement}) = f^{-1}(A)^{\complement}$
5. $f^{-1}(A) = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A \cap f(X) = \emptyset$
6. $T \subseteq X \quad \Longrightarrow \quad T \subseteq f^{-1}(f(T))$
7. $f(f^{-1}(A)) = A \cap f(X)$

Def. 1

1. Seien Λ, X Mengen. Eine Abbildung $f : \Lambda \to X$ heißt *Familie*. Man schreibt (x_λ) oder deutlicher $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ und bezeichnet Λ als *Indexmenge*.

2. Seien Λ, X Mengen. Wir betrachten die Familie $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $X_\lambda = X$ $(\lambda \in \Lambda)$. Dann schreibt man

   $$X^\Lambda := \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda.$$

   für das kartesische Produkt der X_λ. Ist Λ endlich, etwa $|\Lambda| = n \in \mathbb{N}$, so heißen die Elemente von X^Λ n-Tupel. Ist Λ nicht endlich, aber abzählbar, so heißen die Elemente von X^Λ *Folgen* in X.

3. Sei (X_λ) $(\lambda \in \Lambda)$ eine Familie von Mengen und $\alpha \in \Lambda$, $X := \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Dann heißt

   $$\pi_\alpha : X \to X_\alpha, \qquad \pi_\alpha((x_\lambda)) := x_\alpha$$

   die *Projektion* von X auf die α-te Koordiatenmenge.

Satz 2 Sei $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Mengen und $A_\lambda, B_\lambda \subseteq X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. Dann gilt:

1. $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \subseteq \prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \lambda \in \Lambda : \ A_\lambda \subseteq B_\lambda$
2. $\pi_\alpha(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda) = A_\alpha \ (\alpha \in \Lambda)$
3. Ist $X_\alpha = \emptyset$ für ein $\alpha \in \Lambda$, so gilt $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda = \emptyset$.
4. $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \pi^{-1}(A_\lambda)$
5. $\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right) \cap \left(\prod_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda\right) = \prod_{\lambda\in\Lambda} (A_\lambda \cap B_\lambda)$

2 Filter

Def. 2 Ein Mengensystem $\mathfrak{V} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Filter* auf X, wenn gilt:

1. $\mathfrak{V} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathfrak{V}$,
2. $\forall \quad V \in \mathfrak{V} : \qquad W \supseteq V \quad \Longrightarrow \quad W \in \mathfrak{V}$,
3. $V, W \subseteq \mathfrak{V} \quad \Longrightarrow \quad V \cap W \in \mathfrak{V}$.

Bem. Ist $\mathfrak{V}$ Filter auf X, so gilt $X \in \mathfrak{V}$.

Bsp.

- Es sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Das System aller Obermengen von A ist ein Filter, genannnt der *Hauptfilter* von A.
- $\mathcal{P}(X)$ ist kein Filter.
- Betrachte $X = \mathbb{R}$. Die Obermengen aller Intervalle $(-h, h)$ $(h > 0)$ bilden einen Filter auf $\mathbb{R}$.

Def. 3 Es seien $V(X)$ die Menge aller Filter auf X und $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2 \in V(X)$ mit $\mathfrak{V}_1 \subseteq \mathfrak{V}_2$. Dann heißt $\mathfrak{V}_1$ *gröber* als $\mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{V}_2$ *feiner* als $\mathfrak{V}_1$.

Bem. $V(X)$ ist durch „$\subseteq$" geordnet. Der Filter $\{X\}$ ist bezüglich dieser Ordnung das erste Element, also der gröbste Filter. Ein letztes Element gibt es im Allgemeinen nicht.

Satz 3 $\mathfrak{V}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ seien Filter auf X. Dann ist auch

$$\mathfrak{V} := \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{V}_\lambda$$

ein Filter auf X.

Def. 4 Es sei $\mathfrak{V}$ ein Filter auf X. Ein System $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{V}$ heißt (*Filter-*)*Basis* von $\mathfrak{V}$, wenn gilt:

$$\forall \quad V \in \mathfrak{V} \quad \exists \quad B \in \mathfrak{B} : \qquad B \subseteq V.$$

Bem. Zu einem Filter $\mathfrak{V}$ ist eine Basis nicht eindeutig bestimmt.

Bsp.

- Sei $\emptyset \neq A \subseteq X$. Dann ist $\{A\}$ eine Filterbasis des Hauptfilters von A.
- Betrachten wir $X = \mathbb{R}$ und den Filter $\mathfrak{V}$ aller Obermengen aller Intervalle $(-h, h)$ mit $h > 0$. Dann ist die Menge aller Halbsegmente $[-h, h)$ $(h > 0)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$.
- Ist $\mathfrak{V}$ ein Filter, dann ist $\mathfrak{V}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$.

Satz 4 Es sei $\mathfrak{V}$ ein Filter auf X und $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis von $\mathfrak{V}$. Dann gilt:

1. $\mathfrak{B} \neq \emptyset$, $\emptyset \notin \mathfrak{B}$,
2. $\forall \quad B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \quad \exists \quad B \in \mathfrak{B}: \qquad B \subseteq B_1 \cap B_2$.

Umgekehrt existiert zu jedem $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften (1) und (2) genau ein Filter $\mathfrak{V}$, für den $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis ist.

Bem. Der zu $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmte Filter $\mathfrak{V}$ heißt von $\mathfrak{B}$ *erzeugter* Filter und man schreibt $\mathfrak{V}(\mathfrak{B}) := \mathfrak{V}$.

Bsp.

- Ist X eine unendliche Menge, dann ist das System
$$\mathfrak{B} := \{B \subseteq X : |B^{\complement}| < \infty\}$$
eine Filterbasis.
- $(x_n) := (x_1, x_2, \dots)$ sei eine Folge in X. Das System
$$\mathfrak{B} := \{\{x_n, x_{n+1}, \dots\} : n \in \mathbb{N}\}$$
ist eine Filterbasis auf X. Der von $\mathfrak{B}$ erzeugte Filter heißt *Elementarfilter* von (x_n).

Satz 5 X, Y seien Grundmengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Weiter sei $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf X. Dann ist

$$f(\mathfrak{B}) := \{f(B) : B \in \mathfrak{B}\}$$

eine Filterbasis auf Y.

Bem. Sei $\emptyset \neq T \subseteq X$. Ist $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine Filterbasis auf T, so ist $\mathfrak{B}$ auch Filterbasis auf X.

Satz 6 X, Y seien Grundmengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Weiter sei $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf Y. Dann gilt: Das Urbild

$$f^{-1}(\mathfrak{B}) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}$$

ist genau dann eine Filterbasis auf X, wenn gilt:

$$\forall \quad B \in \mathfrak{B}: \qquad B \cap f(X) \neq \emptyset.$$

Def. 5 Ein Mengensystem $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ hat die *endliche Abbildungseigenschaft*, wenn alle endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathfrak{A}$ nicht leer sind.

Def. 6 Es sei $\mathfrak{V}$ ein Filter auf X. Ein System $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{V}$ heißt *Subbasis* von $\mathfrak{V}$, wenn die endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathfrak{S}$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ bilden.

Bem.

- Jede Subbasis hat die endliche Abbildungseigenschaft.
- Zu jedem System $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Abbildungseigenschaft existiert genau ein Filter $\mathfrak{V}$ auf X, für den $\mathfrak{S}$ eine Subbasis bildet. Dieser Filter $\mathfrak{V}$ heißt der *von* $\mathfrak{S}$ *erzeugte* Filter und man schreibt $\mathfrak{V}(\mathfrak{S}) := \mathfrak{V}$.

Satz 7 Seien (X_λ) $(\lambda \in \Lambda)$ nichtleere Mengen und für $\lambda \in \Lambda$ sei $\mathfrak{V}_\lambda$ ein Filter auf X_λ. Weiter sei

$$\mathfrak{B} := \{\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\lambda_i}^{-1}(V_{\lambda_i}) : n \in \mathbb{N}, V_{\lambda_i} \in \mathfrak{V}_{\lambda_i}, \lambda_i \in \Lambda\}.$$

Dann gilt: $\mathfrak{B}$ ist eine Filterbasis auf $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$

Bem. Der von $\mathfrak{B}$ erzeugte Filter heißt *Produktfilter*.

3 Ultrafilter

In diesem Abschnitt bezeichne $V(X)$ die Menge aller Filter auf X.

Def. 7 Ein Filter $\mathfrak{V}^*$ auf X heißt *Ultrafilter* auf X, wenn es auf X keinen echt feineren Filter gibt.

Bem. Ultrafilter sind maximale Elemente in $V(X)$.

Bsp. Hauptfilter einpunktiger Mengen sind Ultrafilter.

Satz 8 Zu jedem Filter $\mathfrak{V}$ auf X existiert ein feinerer Ultrafilter $\mathfrak{V}^*$.

Satz 9 Sei $\mathfrak{V} \in V(X)$. Dann gilt

$$\mathfrak{V} = \bigcap_{\substack{\mathfrak{V}^* \supseteq \mathfrak{V} \\ \mathfrak{V}^* \text{ Ü-Fi}}} \mathfrak{V}^*$$

Satz 10 Sei $\mathfrak{V}^*$ Ultrafilter auf X und $A \subseteq X$. Dann gilt:

$$\forall\, V \in \mathfrak{V}^* : \quad A \cap V \neq \emptyset \qquad \Longrightarrow \qquad A \in \mathfrak{V}^*.$$

Bem. Der Schnitt aller Mengen eines Ultrafilters ist entweder leer oder einpunktig.

Satz 11 Sei $\mathfrak{V}$ ein Filter auf X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $\mathfrak{V}$ ist ein Ultrafilter

2. Von je zwei Mengen $A, B \subseteq X$ mit $A \cup B \in \mathfrak{V}$ liegt mindestens eine in $\mathfrak{V}$.

3. $\forall \quad A \subseteq X : \qquad A \in \mathfrak{V} \quad \vee \quad A^{\complement} \in \mathfrak{V}$.

Satz 12 Eine Überdeckung $\mathfrak{Q}$ von X enthält genau dann eine endliche Teilüberdeckung, wenn jeder Ultrafilter auf X eine Menge aus $\mathfrak{Q}$ enthält.

Satz 13 Seien $X, Y \neq \emptyset$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt: Ist $\mathfrak{B}^*$ Basis eines Ultrafilters auf X, dann ist $f(\mathfrak{B}^*)$ Basis eines Ultrafilters auf Y.

4 Offene und abgeschlossene Mengen

Def. 8 Ein System $\mathfrak{G} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt eine *Topologie* auf X, wenn gilt:

1. $\emptyset \in \mathfrak{G}$, $X \in \mathfrak{G}$,

2. Aus $G_\lambda \in \mathfrak{G}$ $(\lambda \in \Lambda)$ folgt $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda \in \mathfrak{G}$.

3. Aus $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ folgt $G_1 \cap G_2 \in \mathfrak{G}$.

Das Paar $(X, \mathfrak{G})$ heißt *topologischer Raum*. Ist $(X, \mathfrak{G})$ ein topologischer Raum, so heißt eine Menge $G \in \mathfrak{G}$ *offen*.

Bem. Statt $(X, \mathfrak{G})$ schreibt man auch einfacher X. Im Folgenden sei X stets ein topologischer Raum und $\mathfrak{G}$ eine Topologie auf X (soweit nichts anderes gefordert).

Bsp.

- Ist $X = \{a, b\}$, so ist $\mathfrak{G} := \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$ eine Topologie auf X.
- $\mathcal{P}(X)$ ist eine Topologie auf X. Sie heißt die *diskrete* Topologie.
- $\mathfrak{I} := \{\emptyset, X\}$ ist eine Topologie auf X. Sie heißt die *indiskrete* Topologie.
- Das System
$$\mathfrak{G} := \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : |A^{\complement}| < \infty\}$$
ist eine Topologie auf X. Sie heißt die *kofinite* Topologie.
- Sei X unendlich. Dann ist das System
$$\mathfrak{G} := \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A \text{ ist abzählbar}\}$$
eine Topologie auf X.
- Es seien X, Y Grundmengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. $(Y, \mathfrak{H})$ sei ein topologischer Raum. Dann ist
$$\mathfrak{G} := \{f^{-1}(H) \subseteq X : H \in \mathfrak{H}\}$$
eine Topologie auf X.

- Es seien X, Y Grundmengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. $(X, \mathfrak{G})$ sei ein topologischer Raum. Dann ist

$$\mathfrak{H} := \{H \subseteq Y : f^{-1}(H) \in \mathfrak{H}\}$$

eine Topologie auf Y.

- Wir betrachten $X := \mathbb{R}^n$. Die Menge $\mathcal{R}^n \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei wie folgt definiert: Eine Menge $G \subseteq X$ gehöre genau dann zu $\mathcal{R}^n$, wenn gilt:

$$\forall \quad x \in G \quad \exists \quad r > 0 : \qquad G \subseteq U_r(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : ||t - x|| < r\}$$

Dann ist $\mathcal{R}^n$ eine Topologie auf $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{R}^n$ heißt *natürliche* Topologie auf $\mathbb{R}^n$. Mengen $G \subseteq \mathbb{R}^n$ sind bezüglich $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ genau dann offen im Sinne von Definition 8, wenn sie im Sinne der Analysis offen sind.

Def. 9 Es seien $G(X)$ die Menge aller Topologien auf X und $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2 \in G(X)$ mit $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}_2$. Dann heißt $\mathfrak{G}_1$ *gröber* als $\mathfrak{G}_2$ und $\mathfrak{G}_2$ *feiner* als $\mathfrak{G}_1$.

Bem. Die feinste Topologie auf X ist $\mathcal{P}(X)$, die gröbste Topologie ist $\mathfrak{I}$.

Satz 14 $\mathfrak{G}_\lambda$, $(\lambda \in \Lambda)$ seien Topologien auf X. Dann ist auch

$$\mathfrak{G} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{G}_\lambda$$

eine Topologie auf X.

Bem. Sei $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Der Schnitt aller Topologien, die $\mathfrak{A}$ enthalten, ist wieder eine Topologie. Es ist die gröbste Topologie, die $\mathfrak{A}$ enthält.

Def. 10 $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, falls $F^{\complement}$ offen ist.

Bem. In $\mathcal{P}(X)$ ist jede Menge abgeschlossen, in $\mathfrak{I}$ sind $\emptyset$ und X die einzigen abgeschlossenen Mengen.

Satz 15 Sei $\mathfrak{F}$ das System aller abgeschlossenen Teilmengen von X. Dann gilt:

1. $X, \emptyset \in \mathfrak{F}$,
2. Aus $F_\lambda \in \mathfrak{F}$ $(\lambda \in \Lambda)$ folgt $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{F}$,
3. Aus $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ folgt $F_1 \cup F_2 \in \mathfrak{F}$.

Umgekehrt gilt: Ist $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System mit den Eigenschaften (1) und (2), so existiert genau eine Topologie auf X, bezüglich der $\mathfrak{F}$ das System aller abgeschlossenen Teilmengen von X ist.

Bem. Ist $\mathfrak{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ein System abgeschlossener Mengen, so heißt auch $\mathfrak{A}$ *abgeschlossen*.

5 Umgebungen

Def. 11 $U \supseteq A$ heißt *Umgebung* von $A \subseteq X$, falls gilt:

$$\exists \quad G \in \mathfrak{G} : \qquad A \subseteq G \subseteq U$$

Weiter sei $\mathfrak{U}(A) := \{U \subseteq X : U \text{ ist Umgebung von } A\}$.

Bem.

- Für $x \in X$ schreiben wir einfacher auch $\mathfrak{U}(x)$ statt $\mathfrak{U}(\{x\})$.
- Ist U eine Umgebung von $x \in X$, so heißt $\dot{U} := U \setminus \{x\}$ *punktierte* Umgebung von x.

Satz 16 Es gilt:

$$U \in \mathfrak{U}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, a \in A : \quad U \in \mathfrak{U}(a).$$

Bem. A ist genau dann offen, wenn gilt:

$$\forall \quad a \in A : \qquad A \in \mathfrak{U}(a)$$

Satz 17 Es gilt:

1. $\mathfrak{U}(A) \neq \emptyset$,
2. $\forall \quad U \in \mathfrak{U}(A) : \qquad A \subseteq U$,
3. $\forall \quad U \in \mathfrak{U}(A) : \qquad V \supseteq U \quad \Longrightarrow \quad V \in \mathfrak{U}(A)$,
4. $\forall \quad U, V \in \mathfrak{U}(A) : \qquad U \cap V \in \mathfrak{U}(A)$,
5. $\forall \quad U \in \mathfrak{U}(A) \quad \exists \quad V \in \mathfrak{U}(A) : \qquad U \in \mathfrak{U}(V)$.

Umgekehrt gilt: Ist jedem $x \in X$ ein System $\mathfrak{A}(x) \subseteq \mathcal{P}(X)$ derart zugeordnet, daß jedes $\mathfrak{A}(x)$ den Bedingungen (1) bis (5) genügt, so gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{H}$ auf X mit $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{U}(x)$ $(x \in X)$.

Bem. $\mathfrak{U}(x)$ $(x \in X)$ ist ein Filter auf X, der *Umgebungsfilter* von x. Jede Filterbasis von $\mathfrak{U}(x)$ heißt *Umgebungsbasis*.

6 Ausgewiesene Punkte von Mengen

In diesem Abschnitt sei $A \subseteq X$.

Def. 12 $x \in X$ heißt *innerer Punkt* von A, falls gilt $A \in \mathfrak{U}(x)$. Die Menge A^0 aller inneren Punkte von A heißt *Inneres* (oder *offener Kern*) von A.

Bem.

- A^0 ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A.
- Ist $G \subseteq A$ offen, so gilt auch $G \subseteq A^0$.

- $G \subseteq X$ ist genau dann offen, wenn gilt $G = G^0$.
- $A \subseteq B \quad \Longrightarrow \quad A^0 \subseteq B^0$.
- Seien A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ Teilmengen von X. Dann gilt

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^0 \subseteq \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^0 .$$

Satz 18 Es seien $A, B \subseteq X$. Dann gilt

1. $X^0 = X$,
2. $A^0 \subseteq A$,
3. $A^{00} = A^0$,
4. $(A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$.

Umgekehrt gilt: Ist jedem $A \subseteq X$ in eindeutiger Weise ein $A^* \subseteq X$ zugeordnet, daß für $A, B \subseteq X$ die Bedingungen (1) bis (4) sinngemäß erfüllt sind, so gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{H}$ auf X mit $A^0 = A^*$ $(A \subseteq X)$.

Bem. Die Bedingungen in obigem Satz heißen KURATOWSKI-Axiome.

Bem. $\mathfrak{B}$ sei eine Umgebungsbasis von A. Dann ist $\mathfrak{B}_0 := \{B^0 : B \in \mathfrak{B}\}$ eine offene Umgebungsbasis von A.

Def. 13 $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von A, wenn gilt

$$\forall \quad U \in \mathfrak{U}(x): \qquad U \cap A \neq \emptyset.$$

Die Menge $\overline{A}$ aller Berührpunkte von A heißt *Abschluß* von A.

Satz 19 Es sei $A \subseteq X$. Dann gilt

$$\overline{A} = \bigcap_{B \supset A} B.$$

Bem. $\overline{A}$ ist eine abgeschlossene Obermenge von A und heißt daher auch *abgeschlossene Hülle* von A.

Satz 20 Seien $A, B \subseteq X$. Dann gilt

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$,
2. $A \subseteq \overline{A}$,
3. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$,
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Umgekehrt gilt: Ist jedem $A \subseteq X$ in eindeutiger Weise ein $A^* \subseteq X$ zugeordnet, daß für $A, B \subseteq X$ die Bedingungen (1) bis (4) sinngemäß erfüllt sind, so gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{H}$ auf X mit $\overline{A} = A^*$ $(A \subseteq X)$.

Satz 21 Es gilt $(A^0)^{\complement} = \overline{A^{\complement}}$ und $\overline{A}^{\complement} = (A^{\complement})^0$.

Def. 14

1. A heißt *dicht*, falls gilt
$$\forall \quad G \in \mathfrak{G} \setminus \{\emptyset\} : \qquad A \cap G \neq \emptyset.$$

2. A heißt *nirgends dicht*, falls gilt
$$\forall \quad G \in \mathfrak{G} \setminus \{\emptyset\} \quad \exists \quad H \in \mathfrak{G} \setminus \{\emptyset\},\ H \subseteq G : \qquad A \cap H = \emptyset.$$

Bem.

- A ist genau dann dicht, wenn gilt $\overline{A} = X$.
- A ist genau dann nirgends dicht, wenn gilt $(\overline{A})^0 = \emptyset$.

Def. 15 Seien $\mathfrak{V}$ ein Filter und $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf X.

1. $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von $\mathfrak{V}$, falls x Berührpunkt jedes $V \in \mathfrak{V}$ ist.
2. $x \in X$ heißt *Berührpunkt* von $\mathfrak{B}$, falls x Berührpunkt des von $\mathfrak{B}$ erzeugten Filters ist.

Satz 22 Sei $\mathfrak{V}$ ein Filter auf X. Dann gilt:

1. Die Menge aller Berührpunkte von $\mathfrak{V}$ ist abgeschlossen.
2. Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{B}$, so gilt: $x \in X$ ist genau dann Berührpunkt von $\mathfrak{B}$, wenn x Berührpunkt jedes $B \in \mathfrak{B}$ ist.

Def. 16 Sei $x \in X$.

1. x heißt *Randpunkt* von A, falls gilt:
$$\forall \quad U \in \mathfrak{U}(x) : \qquad U \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U \cap A^{\complement} \neq \emptyset.$$
Die Menge ∂A aller Randpunkte von A heißt *Rand* von A.

2. x heißt *Häufungspunkt* von A, falls gilt:
$$\forall \quad U \in \mathfrak{U}(x) : \qquad (U \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$
Die Menge A' aller Häufungspunkte von A heißt *Ableitung* von A.

Satz 23 Es gilt:

1. $\partial A = \overline{A} \setminus A^0$
2. ∂A ist abgeschlossen
3. $\partial A = \partial(A^{\complement})$
4. $X = A^0 \cup \partial A \cup (A^{\complement})^0$
5. $\partial A = \emptyset \quad \Longleftrightarrow \quad A = \overline{A} = A^0$

7 Basen und Subbasen von Topologien

Def. 17 Ein System $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ heißt *Basis* von $\mathfrak{G}$, wenn gilt:

$$\forall \quad G \in \mathfrak{G} \quad \exists \quad B_\lambda (\lambda \in \Lambda): \qquad G = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

für geeignete Mengen $B_\lambda \in \mathfrak{B}$.

Bsp. Es sei $X = \mathbb{R}^n$, versehen mit der natürlichen Toplogie $\mathcal{R}^n$. Das System aller Kugeln $U_r(x)$ ($x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$) ist eine Basis von $\mathcal{R}^n$. Eine weitere Basis wäre das System aller Quader im $\mathbb{R}^n$.

Bem.

- Die Topologie $\mathfrak{G}$ ist durch eine Basis $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt.
- Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{G}$ und gilt $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{A}$ eine Basis von $\mathfrak{G}$.
- Ist $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{B} \setminus \{\emptyset\}$ eine Basis von $\mathfrak{G}$.
- $\mathfrak{G}$ ist eine Basis von $\mathfrak{G}$.

Satz 24 Es sei $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{G}$. Dann gilt: $\mathfrak{B}$ ist genau dann Basis von $\mathfrak{G}$, wenn für jedes $x \in X$ das System

$$\mathfrak{B}(x) := \{B \in \mathfrak{B} : x \in B\}$$

eine Umgebungsbasis von x ist.

Satz 25 $\mathfrak{G}$ sei Topologie auf X und $\mathfrak{B}$ Basis von $\mathfrak{G}$. Dann gilt:

1. $\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B = X$,
2. $\forall \quad B_1, B_2 \in \mathfrak{B} \quad \exists \quad B_\lambda \in \mathfrak{B}\ (\lambda \in \Lambda): \qquad B_1 \cap B_2 = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$

Umgekehrt gilt: Ist $\mathfrak{B} \in \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit den obigen Eigenschaften, dann existiert genau eine Topologie $\mathfrak{G}$ auf X, für die $\mathfrak{B}$ Basis ist.

Bem. Die eindeutig bestimmte Topologie $\mathfrak{G}$ aus obigem Satz heißt auch die von $\mathfrak{B}$ *erzeugte* Topologie und man schreibt $\mathfrak{G}(\mathfrak{B}) := \mathfrak{G}$.

Def. 18 Ein System $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{G}$ heißt *Subbasis* von $\mathfrak{G}$, wenn das System aller endlichen Schnitte von Mengen aus $\mathfrak{S}$ eine Basis von $\mathfrak{G}$ ist.

Bsp.

- Das System

$$\mathfrak{S} := \{(-\infty, c), (c, \infty) : c \in \mathbb{R}\}$$

ist eine Subbasis der natürlichen Topologie $\mathcal{R}^1$ von $\mathbb{R}$.

- Wir betrachten $X = \mathbb{R}^2$. Zu $c \in \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} H_c^+ &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > c\}, & H_c^- &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < c\}, \\ E_c^+ &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > c\}, & E_c^- &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < c\}. \end{aligned}$$

  Dann ist das System $\mathfrak{S}$, definiert durch

$$\mathfrak{S} := \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \{H_c^+, H_c^-, E_c^+, E_c^-\}$$

  eine Subbasis der natürlichen Topologie $\mathcal{R}^2$ auf $\mathbb{R}^2$.

Bem.

- Die Topologie $\mathfrak{G}$ ist durch eine Subbasis $\mathfrak{S}$ eindeutig bestimmt.
- Ist $\mathfrak{S}$ eine Subbasis von $\mathfrak{G}$ und gilt $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{T}$ eine Subbasis von $\mathfrak{G}$.
- Ist $\mathfrak{S}$ eine Subbasis von $\mathfrak{G}$, so ist auch $\mathfrak{S} \setminus \{X, \emptyset\}$ eine Subbasis von $\mathfrak{G}$.
- $\mathfrak{G}$ ist eine Subbasis von $\mathfrak{G}$.

Satz 26 Es sei $\mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann existiert genau eine Topologie $\mathfrak{G}$ auf X, für die $\mathfrak{S}$ Subbasis ist.

Bem. Die eindeutig bestimmte Topologie $\mathfrak{G}$ heißt von $\mathfrak{S}$ *erzeugte* Topologie und man schreibt $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) := \mathfrak{G}$.

8 Spurtopologien und Unterräume

Def. 19 Es sei $\emptyset \neq T \subseteq X$. Das System

$$\mathfrak{G}_T := \{G \cap T : G \in \mathfrak{G}\} \subseteq \mathcal{P}(T)$$

heißt *Spurtopologie* von $\mathfrak{G}$ auf T. Der Raum $(T, \mathfrak{G}_T)$ heißt *topologischer Unterraum* oder *Teilraum* von $(X, \mathfrak{G})$. Eine Menge $G \in \mathfrak{G}_T$ heißt *offen in* T.

Bem.

- Die Spurtopologie ist eine Topologie.
- Ist T selbst offen in X, so ist $A \subseteq T$ genau dann offen in T, wenn A offen in X ist.
- Sei $\mathfrak{F}$ das System der in X abgeschlossenen Mengen. Dann ist

$$\mathfrak{F}_T := \{F \cap T : F \in \mathfrak{F}\}$$

  das System der auf T abgeschlossenen Mengen.
- Sei $A \subseteq S \subseteq T \subseteq X$. Ist A offen [abgeschlossen] in T, so ist A offen [abgeschlossen] in S.

- Seien $S, T \subseteq X$, $A \subseteq T \cap S$. Ist A offen [abgeschlossen] in S und in T, so ist A offen [abgeschlossen] in $S \cup T$.

Bsp.

- Wir betrachten $(X, \mathfrak{G})$ mit
$$X = \{a, b, c, d\}, \qquad \mathfrak{G} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, X\}$$
und $T := \{a, c, d\}$. Dann ist
$$\mathfrak{G}_T = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, T\}$$
die Spurtopologie von $\mathfrak{G}$ auf T.
- Es gilt $\mathcal{R}^1_{\mathbb{Z}} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
- Sei $X = \mathbb{R}$ und $T = [0, \infty)$. Dann ist jede Menge $[0, c)$ $(c > 0)$ offen in T.

Satz 27 Sei $A \subseteq T \subseteq X$. Dann ist $\overline{A} \cap T$ der Abschluß von A in T, d.h. A ist genau dann abgeschlossen in T, wenn gilt $A = \overline{A} \cap T$.

Satz 28 Es sei $(T, \mathfrak{G}_T)$ topologischer Unterraum von $(X, \mathfrak{G})$ und $x \in T$. Zu $\mathfrak{B}, \mathfrak{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$ seien definiert
$$\mathfrak{B}_T = \{B \cap T : B \in \mathfrak{B}\}, \qquad \mathfrak{S}_T = \{S \cap T : S \in \mathfrak{S}\}.$$
Dann gilt:

1. Ist $\mathfrak{B}$ eine Umgebungsbasis von x in X, so ist $\mathfrak{B}_T$ eine Umgebungsbasis von x in T.
2. Ist $\mathfrak{B}$ [$\mathfrak{S}$] eine Basis [Subbasis] von $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{B}_T$ [$\mathfrak{S}_T$] eine Basis [Subbasis] von $\mathfrak{G}_T$.

Bsp. Sei $X = \mathbb{R}$, $T = [0, 1]$. Dann ist
$$\mathfrak{S}_T = \{[0, c), (c, 0], 0 < c < 1\}$$
eine Subbasis der Spurtopologie von $\mathcal{R}$ auf T.

9 Konvergenz

Def. 20 (x_n) sei eine Folge in X. (x_n) heißt *konvergent* gegen x, wenn gilt
$$\forall \quad U \in \mathfrak{U}(x) \quad \exists \quad n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \quad n \geq n_0 : \qquad x_n \in U$$
In diesem Fall heißt x ein *Limes* von (x_n) und man schreibt $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ oder $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$.

Bsp.

- In $(X, \mathfrak{I})$ konvergiert jede Folge gegen jeden Punkt. Der Limes einer Folge ist also nicht eindeutig bestimmt.

- In $(X, \mathcal{P}(X))$ konvergiert eine Folge $(x_n) := (x_0, x_1, \dots)$ genau dann, wenn sie stationär ist, d.h. wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n = x_{n_0}$ $(n \geq n_0)$.

- Sei X eine unendliche Menge und

$$\mathfrak{G} := \{\emptyset\} \cup \{A \subseteq X : A \text{ ist abzählbar}\}.$$

  Dann ist eine Folge genau dann konvergent, wenn sie stationär ist.

Satz 29 Sei $T \subseteq X$ und (t_n) eine Folge in T. Dann gilt: Ist t ein Limes von (t_n), so ist $t \in \overline{T}$.

Def. 21 Sei $x \in X$.

1. Ein Filter $\mathfrak{V}$ auf X mit $\mathfrak{V} \subseteq \mathfrak{U}(x)$ heißt *konvergent* gegen x, und man schreibt $\lim \mathfrak{V} = x$ oder $\mathfrak{V} \to x$.

2. Eine Filterbasis $\mathfrak{B}$ auf X heißt *konvergent* gegen x wenn der von $\mathfrak{B}$ erzeugte Filter gegen x konvergiert. In diesem Fall schreibt man $\lim \mathfrak{B} = x$ oder $\mathfrak{B} \to x$.

Bsp.

- Für jedes $x \in X$ gilt $\lim \mathfrak{U}(x) = x$.

- In $(X, \mathfrak{I})$ konvergiert jeder Filter gegen jeden Punkt.

- In $(X, \mathcal{P}(X))$ konvergiert ein Filter $\mathfrak{V}$ genau dann gegen $x \in X$, wenn $\mathfrak{V}$ der Hauptfilter von x ist.

Satz 30 Eine Folge in X konvegiert genau dann gegen $x \in X$, wenn ihr Elementarfilter gegen x konvergiert.

Satz 31 Es sei $\mathfrak{V}$ ein Filter auf X und $x \in X$. Dann gilt:

1. Aus $\mathfrak{V} \to x$ folgt $\mathfrak{W} \to x$ für jeden gröberen Filter $\mathfrak{W} \supseteq \mathfrak{V}$.

2. Gilt $\mathfrak{V}^* \to x$ für jeden Ultrafilter $\mathfrak{V}^* \supseteq \mathfrak{V}$, so gilt $\mathfrak{V} \to x$.

3. Ist x ein Berührpunkt von $\mathfrak{V}$, so existiert ein Filter $\mathfrak{W} \supseteq \mathfrak{V}$, der gegen x konvergiert.

4. Aus $\mathfrak{V} \to x$ folgt: x ist Berührpunkt aller feineren Filter $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$.

Bem. Ist x Berührpunkt eines Ultrafilters $\mathfrak{V}^*$, so gilt $\mathfrak{V}^* \to x$.

Satz 32 Sei $\mathfrak{B}$ eine Filterbasis auf X und $x \in X$. Dann gilt:

$$\mathfrak{B} \to x \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall\, U \in \mathfrak{U}(x)\ \exists\, B \in \mathfrak{B} : \quad B \subseteq U.$$

Satz 33 Es sei $\emptyset \neq T \subseteq X$ und $x \in X$. Es gilt $x \in \overline{T}$ genau dann, wenn es eine Filterbasis $\mathfrak{B}$ auf T gibt, die als Filterbasis auf X gegen x konvergiert.

10 Stetigkeit

In diesem Abschnitt seien $(X, \mathfrak{G})$ und $(Y, \mathfrak{H})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Def. 22 f heißt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$-*stetig* in $x \in X$, wenn gilt:

$$\forall \quad V \in \mathfrak{U}(f(x)) \quad \exists \quad U \in \mathfrak{U}(x) : \qquad f(U) \subseteq V.$$

Ist f in jedem $x \in X$ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$-stetig, so heißt f $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$-*stetig* (auf X).

Bem.

- Statt $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$-stetig sagt man oft einfacher stetig.
- Im Fall $(X, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ und $(Y, \mathfrak{H}) = (\mathbb{R}^m, \mathcal{R}^m)$ stimmt die obige Definition mit der Definition aus der reellen Analysis überein.

Bsp.

- Die identische Abbildung und jede konstante Abbildung sind in jedem Punkt stetig.
- Ist $\mathfrak{G} = \mathcal{P}(X)$ und $\mathfrak{H} = \mathfrak{I}$, so ist f in jedem Punkt stetig.
- Ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{I}$ und $\mathfrak{H} = \mathcal{P}(X)$, so ist f in keinem Punkt stetig.

Bem. f sei stetig in x.

- f bleibt stetig in x, wenn man statt $\mathfrak{G}$ eine feinere oder statt $\mathfrak{H}$ eine gröbere Topologie wählt.
- $(Z, \mathfrak{K})$ sei ein weiterer topologischer Raum und $g : Y \to Z$ sei stetig in $f(x) \in Y$. Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig in x.
- Sei $T \subseteq X$ und $x \in T$. Dann ist $f|_T : T \to Y$ $(\mathfrak{G}_T, \mathfrak{H})$-stetig in x.
- Sei $S \subseteq Y$ und $g : X \to Y$ eine Abbildung mit $f(X) \subseteq S$. Dann gilt: g ist genau dann $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$-stetig in x, wenn $f : X \to S$ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}_S)$-stetig in x ist.

Satz 34 f sei stetig in $x \in X$. Dann ist f *folgenstetig* in x, d.h. für jede gegen x konvergente Folge (x_n) in X konvergiert $(f(x_n))$ gegen $f(x)$.

Satz 35 Seien A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ Mengen und $X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$. Für $\lambda \in \Lambda$ sei $f_\lambda := f|_{A_\lambda} : A_\lambda \to X$ stetig. Dann gilt:

1. Sind alle A_λ offen, so ist f stetig.
2. Sind alle A_λ abgeschlossen und ist Λ endlich, so ist f stetig.

Satz 36 f ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn für jede Filterbasis $\mathfrak{B}$ auf X mit $\mathfrak{B} \to X$ auch $f(\mathfrak{B}) \to f(X)$ gilt.

Bem. f ist genau dann stetig in x, wenn gilt $f(\mathfrak{U}(x)) \to f(x)$.

Satz 37 Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. $\forall \quad H \in \mathfrak{H}: \qquad f^{-1}(H) \in \mathfrak{G}$.
3. Das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ist abgeschlossen.
4. $\forall \quad B \subseteq Y: \qquad f^{-1}(B^0) \subseteq (f^{-1}(B))^0$.
5. $\forall \quad A \subseteq X: \qquad f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Bem.

- $\mathfrak{G}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ seien Topologien auf X. Dann gilt: Ist f $(\mathfrak{G}_\lambda, \mathfrak{H})$-stetig für jedes $\lambda \in \Lambda$, so ist f auch $(\mathfrak{D}, \mathfrak{H})$-stetig, wobei $\mathfrak{D} := \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{G}_\lambda$.
- Seien $A, B \subseteq X$ abgeschlossen mit $A \cup B = X$. $f : A \to Y$ sei $(\mathfrak{G}_A, \mathfrak{H})$-stetig, $g : B \to Y$ sei $(\mathfrak{G}_B, \mathfrak{H})$-stetig und es gelte $f(x) = g(x)$ für $x \in A \cap B$. Dann ist
$$h : X \to Y, \qquad h(x) := \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & \text{sonst} \end{cases}$$
stetig.

Satz 38 Sei $\mathfrak{S}$ eine Subbasis von $\mathfrak{H}$. Dann gilt: Ist $f^{-1}(S)$ offen $(S \in \mathfrak{S})$, so ist f stetig.

11 Offene und abgeschlossene Abbildungen

In diesem Abschnitt seien $(X, \mathfrak{G})$ und $(Y, \mathfrak{H})$ topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Def. 23 f heißt *offen* [*abgeschlossen*], wenn das Bild jeder offenen [abgeschlossenen] Menge in X offen [abgeschlossen] in Y ist.

Satz 39 f ist genau dann offen [abgeschlossen], wenn für jedes $A \subseteq X$ gilt:
$$f(A^0) \subseteq (f(A))^0 \qquad \text{bzw.} \qquad f(\overline{A}) \supseteq \overline{f(A)}.$$

Satz 40 Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis in X. Dann gilt: Ist $f(B)$ offen für jedes $B \in \mathfrak{B}$, so ist f offen.

Def. 24 Sei $f : X \to Y$ bijektiv. f heißt *topologisch* (oder *homöomorph*), falls f und f^{-1} stetig sind.

Bem.

- Jede topologische Abbildung ist offen und abgeschlossen.
- Verkettungen topologischer Abbildungen sind topologisch.
- Ist $f : X \to Y$ topologisch und $\mathfrak{B}$ [$\mathfrak{S}$] eine Basis [Subbasis] von X, so ist $f(\mathfrak{B})$ [$f(\mathfrak{S})$] eine Basis [Subbasis] von Y.

- Ist $\mathfrak{B}(x)$ eine Umgebungsbasis von $x \in X$, so ist $f(\mathfrak{B}(x))$ eine Umgebungsbasis von $f(x) \in Y$.

Satz 41 Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. f ist topologisch
2. f ist stetig und offen
3. f ist stetig und abgeschlossen
4. $\forall \quad A \subseteq X : \qquad f(A^0) = (f(A))^0$
5. $\forall \quad A \subseteq X : \qquad f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

Def. 25 Zwei topologische Räume X und Y heißen zueinander *homöomorph* (oder *topologisch äquivalent*), falls es einen Homöomorphismus $f : X \to Y$ gibt.

12 Initiale und finale Topologie

Satz 42 Es sei $X \neq \emptyset$ und zu $\lambda \in \Lambda$ seien topologische Räume $(X_\lambda, \mathfrak{G}_\lambda)$ und Abbildungen $f_\lambda : X \to X_\lambda$ gegeben. Dann ist

$$\mathfrak{S} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \{f_\lambda^{-1}(G_\lambda) : G_\lambda \in \mathfrak{G}_\lambda\}$$

eine Subbasis der gröbsten Topologie $\mathfrak{G}$ auf X, so daß alle f_λ $(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}_\lambda)$-stetig sind.

Bem. Diese Topologie heißt *initiale Topologie* der f_λ.

Satz 43 Zu $\lambda \in \Lambda$ seien topologische Räume $(X_\lambda, \mathfrak{G}_\lambda)$ und Abbildungen $f_\lambda : X \to X_\lambda$ gegeben. X trage die initiale Topologie der f_λ. $(Y, \mathfrak{H})$ sei ein weiterer topologischer Raum und $g : Y \to X$ eine weitere Abbildung. Dann gilt: g ist genau dann stetig, wenn alle $f_\lambda \circ g : Y \to X_\lambda$ stetig sind.

Satz 44 Es sei $X \neq \emptyset$ und zu $\lambda \in \Lambda$ seien topologische Räume $(X_\lambda, \mathfrak{G}_\lambda)$ und Abbildungen $f_\lambda : X_\lambda \to X$ gegeben. Dann ist

$$\mathfrak{G} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{G \subseteq X : f_\lambda^{-1}(G) \in \mathfrak{G}_\lambda\}$$

die feinste Topologie auf X, so daß alle f_λ stetig sind.

Bem. Diese Topologie heißt die *finale* Topologie der f_λ.

Satz 45 Zu $\lambda \in \Lambda$ seien topologische Räume $(X_\lambda, \mathfrak{G}_\lambda)$ und Abbildungen $f_\lambda : X_\lambda \to X$ gegeben. X trage die finale Topologie der f_λ. $(Y, \mathfrak{H})$ sei ein weiterer topologischer Raum und $g : X \to Y$ eine weitere Abbildung. Dann gilt: g ist genau dann stetig, wenn alle $g \circ f_\lambda : X_\lambda \to Y$ stetig sind.

Satz 46 $(X, \mathfrak{G})$ und $(Y, \mathfrak{H})$ seien topologische Räume, $f : X \to Y$ sei surjektiv, stetig und offen. Dann gilt: $\mathfrak{G}$ ist die finale Topologie von f.

13 Produkträume

Zu $\lambda \in \Lambda$ betrachten wir topologische Räume $(X_\lambda, \mathfrak{G}_\lambda)$. Mit X bezeichnen wir das kartesische Produkt aller X_λ.

Def. 26 Es sei $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ die Projektion von X auf X_λ. Dann heißt die initiale Topologie $\mathfrak{G}$ der π_λ die *Produkttopologie* auf X, Schreibweise: $\mathfrak{G} := \prod \mathfrak{G}_\lambda$

Bem.

- Die Mengen $\pi_\alpha^{-1}(G) := \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} G_\lambda$ mit

$$G_\lambda := \begin{cases} G & \text{falls } \lambda = \alpha \text{ und } G \in \mathfrak{G}_\alpha \\ X_\lambda & \text{sonst} \end{cases}$$

  bilden eine Subbasis der Produkttopologie.

- Die Mengen

$$G := \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(G_{\alpha_i}) \qquad (G_{\alpha_i} \in \mathfrak{G}_{\alpha_i})$$

  bilden eine natürliche Basis der Produkttopologie.

Satz 47 Sei $\mathfrak{B}_\lambda$ eine Umgebungsbasis von $x_\lambda \in X_\lambda$. Dann bilden die Mengen

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_{\alpha_i}) \qquad (B_{\alpha_i} \in \mathfrak{B}_{\alpha_i})$$

eine Umgebungsbasis von $(x_\lambda) \in X$ bezüglich der Produkttopologie.

Bem.

- Ist $\mathfrak{S}_\lambda$ eine Subbasis von X_λ $(\lambda \in \Lambda)$, so bilden die Mengen $\pi_\lambda^{-1}(\lambda)$ $(S_\lambda \in \mathfrak{S}_\lambda)$ eine Subbasis in X.

- Ist Λ endlich, etwa

$$X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n, \qquad \mathfrak{G} = \prod_{i=1}^{n} \mathfrak{G}_i,$$

  so besteht die natürliche Basis gerade aus den Mengen $\prod\limits_{i=1}^{n} G_i$ mit $G_i \in \mathfrak{G}_i$.

- Die natürliche Topologie $\mathcal{R}^n$ des $\mathbb{R}^n$ ist damit die Produkttopologie von $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$.

Satz 48 Zu $\lambda \in \Lambda$ seien Mengen $\emptyset \neq T_\lambda \subseteq X_\lambda$ gegeben. Weiter seien

$$X := \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \qquad T := \prod_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda.$$

Dann gilt:

$$\left(\prod_{\lambda\in\Lambda} \mathfrak{G}_\lambda\right)_T = \prod_{\lambda\in\Lambda} ((\mathfrak{G}_\lambda)_{T_\lambda})$$

Satz 49 Sei $\emptyset \neq A_\lambda \subseteq X_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$. Dann gilt:

$$\overline{\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda} = \prod_{\lambda\in\Lambda} \overline{A_\lambda}$$

Bem. Insbesondere ist $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ genau dann abgeschlossen, wenn jedes A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ abgeschlossen ist.

Satz 50 Für das Produkt X ist die Projektion $\pi_\lambda : X \to X_\lambda$ stetig, offen und surjektiv.

Bsp. Projektionen sind aber i.A. nicht abgeschlossen: Betrachte

$$A := \{(x, \frac{1}{x}) : x \neq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

A ist abgeschlossen, aber $\pi_1(A) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist nicht abgeschlossen.

Satz 51 Sei $(Y, \mathfrak{H})$ ein topologischer Raum. Dann ist eine Abbildung

$$f : Y \to \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

genau dann stetig, wenn alle $\pi_\lambda \circ f$ $(\lambda \in \Lambda)$ stetig sind.

Def. 27 Zu $\lambda \in \Lambda$ seien neben $(X_\lambda, \mathfrak{G}_\lambda)$ weitere topologische Räume $(Y_\lambda, \mathfrak{H}_\lambda)$ gegeben. Weiter seien $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ Abbildungen. Dann heißt die durch

$$f : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to \prod_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda, \qquad f((x_\lambda)) := (f_\lambda(x_\lambda))$$

definierte Abbildung *Produktabbildung* und man schreibt $f := \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$.

Satz 52 Eine Produktabbildung $f = \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} f_\lambda$ ist genau dann stetig, wenn alle f_λ stetig sind. Ist f zusätzlich offen, so sind alle f_λ offen. Sind alle f_λ offen und mit endlich vielen Ausnahmen surjektiv, so ist f offen.

Satz 53 Es sei $z = (z_\lambda) \in X$ und $\emptyset \neq \Delta \subseteq \Lambda$. Zu $\lambda \in \Lambda$ seien Mengen T_λ definiert durch

$$T_\lambda := \begin{cases} X_\lambda & \lambda \in \Delta \\ \{z_\lambda\} & \text{sonst} \end{cases}$$

und es sei $T := \prod\limits_{\lambda\in\Lambda} T_\lambda$. Dann ist T homöomorph zu $\prod\limits_{\lambda\in\Delta} X_\lambda$.

Bem. Sind X, Y, Z topologische Räume und $f : X \times Y \to Z$ stetig in (x_0, y_0), so ist die partielle Abbildung

$$g : X \to Z, \qquad g(x) := f(x, y_0)$$

stetig in x_0.

Satz 54

1. Eine Folge $(x_\lambda^{(1)}), (x_\lambda^{(2)}), \ldots$ von Punkten aus X konvergiert genau dann gegen $x = (x_\lambda)$, wenn für jedes λ die Koordinatenfolge $x_\lambda^{(1)}, x_\lambda^{(2)}, \ldots$ gegen x_λ konvergiert.

2. Eine Filterbasis $\mathfrak{B}$ auf X konvergiert genau dann gegen $x = (x_\lambda) \in X$, wenn für jedes λ die Bildbasis $\pi_\lambda(\mathfrak{B})$ gegen x_λ konvergiert.

14 Quotientenräume

In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{a}$ eine Äquivalenzrelation auf X. Es bezeichne $\hat{X} := {}^{X}/_{\mathfrak{a}}$

Def. 28 Die finale Topologie $\hat{\mathfrak{G}}$ der kanonischen Abbildung $v : X \to \hat{X}$ heißt *Quotiententopologie* auf $\hat{X}$, Schreibweise $\hat{\mathfrak{G}} = {}^{\mathfrak{G}}/_{\mathfrak{a}}$. Der topologische Raum $(\hat{X}, \hat{\mathfrak{G}})$ heißt *Quotientenraum*.

Bem.

- $\hat{G}$ ist genau dann offen in $\hat{X}$, wenn $v^{-1}(\hat{G})$ offen in X ist.
- $\hat{F}$ ist genau dann abgeschlossen in $\hat{X}$, wenn $v^{-1}(\hat{F})$ abgeschlossen in X ist.

Satz 55 Sei $(Y, \mathfrak{H})$ ein topologischer Raum und $g : \hat{X} \to Y$ eine Abbildung. Dann gilt: g ist genau dann stetig, wenn $g \circ v$ stetig ist.

Bem. Im folgenden betrachten wir zwei topologische Räume $(X, \mathfrak{G})$ und $(Y, \mathfrak{H})$ sowie eine Abbildung $f : X \to Y$ und die dadurch induzierte Äquivalenzrelation $\sim$ mit

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad f(x) = f(y).$$

Es sei nun $\hat{X} := {}^{X}/_{\sim}$ versehen mit der Quotiententopologie und

$$\hat{f} : \hat{X} \to Y, \qquad \hat{f}([x]_{\sim}) := f(x)$$

Es gilt: Ist f stetig, so ist auch $\hat{f}$ stetig.

Satz 56 (Homöomorphiesatz) Sei $X, Y, f, \hat{f}$ wie in vorstehender Bemerkung und f zusätzlich surjektiv. Dann gilt:

1. Trägt Y die finite Topologie, so ist $\hat{f}$ topologisch.
2. Ist f offen, so ist $\hat{f}$ topologisch.

Bsp. Sei $(X, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}, \mathcal{R})$ und $Y = \mathbf{T} := \partial U_1(0,0) \subseteq \mathbb{R}^2$, versehen mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^2$ ($\mathbf{T}$ heißt 1-*Torus*). Die Äquivalenzrelation $\sim$ sei definiert durch

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad \exists\, k \in \mathbb{Z} : \quad x = y + 2k\pi.$$

Weiter sei

$$f : \mathbb{R} \to \mathbf{T}, \qquad f(t) := (\sin t, \cos t).$$

f ist surjektiv, stetig und offen. Damit ist $\hat{f}$ topologisch und somit ${}^{\mathbb{R}}/_{\sim}$ homöomorph zu $\mathbf{T}$.

15 Abzählbarkeit

Def. 29 Es sei E eine Eigenschaft topologischer Räume. E heißt:

1. *erblich*, falls mit X auch jeder Unterraum von X die Eigenschaft E hat.
2. *topologisch*, falls mit X auch jeder zu X homöomorphe Raum Y die Eigenschaft E hat.
3. *produktinvariant*, falls mit einem Produktraum $X = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ auch jeder Koordinatenraum X_λ die Eigenschaft E hat.

Def. 30 X heißt A_1*-Raum*, wenn jedes $x \in X$ eine abzählbare Umgebungsbasis besitzt.

Bsp.

- $\mathbb{R}^n$ ist ein A_1-Raum, denn zu $x \in \mathbb{R}^n$ ist z.B.

$$\mathfrak{B}(x) := \{U_1(x), U_{1/2}(x), \dots\}$$

  eine abzählbare Umgebungsbasis.

- Ist X diskret oder indiskret, so ist X ein A_1-Raum.
- Sei X überabzählbar, $z \in X$. Es sei

$$\mathfrak{G} := \{G \subseteq \mathcal{P}(X) : z \notin G\} \cup \{G \subseteq \mathcal{P}(X) : z \in G \ \wedge \ |G^{\mathbf{C}}| < \infty\}.$$

  Dann ist $\mathfrak{G}$ eine Topologie auf X und $(X, \mathfrak{G})$ ist kein A_1-Raum.

Bem.

- X ist genau dann A_1-Raum, wenn zu jedem $x \in X$ eine abzählbare, fallende, offene Umgebungsbasis existiert.
- Ist $\{B_1, B_2, \dots\}$ eine abzählbare, fallende Umgebungsbasis von x und $x_n \in B_n$ $(n \in \mathbb{N})$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.
- A_1 ist erblich und topologisch.

Satz 57 Sei X ein A_1-Raum, $x \in T \subseteq X$. Dann gilt: x ist genau dann Berührpunkt von T, wenn es eine Folge (t_n) in T gibt mit $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = x$.

Satz 58 Sei $(Y, \mathfrak{H})$ ein topologischer Raum und X ein A_1-Raum. Dann gilt: Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig in $x \in X$, wenn f folgenstetig in x ist.

Satz 59 Ein topologisches Produkt $X = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist genau dann ein A_1-Raum, wenn alle X_λ ihrerseits A_1-Räume und mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen indiskret sind.

Def. 31 $(X, \mathfrak{G})$ heißt A_2*-Raum*, wenn $\mathfrak{G}$ eine abzählbare Basis besitzt.

Bsp.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ ist ein A_2-Raum, denn
$$\mathfrak{B} := \{U_r(x) : x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}, r > 0\}$$
ist eine abzählbare Basis von $\mathcal{R}^n$.
- Ist X indiskret, so ist X ein A_2-Raum.
- Ist X überabzählbar und diskret, so ist X kein A_2-Raum.

Bem.

- Ist X ein A_2-Raum, so ist X auch ein A_1-Raum.
- A_2 ist erblich und topologisch.

Def. 32 X heißt LINDELÖF–Raum, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Satz 60 (Satz von LINDELÖF) Sei X ein A_2-Raum. Dann gilt

1. Jede offene Überdeckung $\mathfrak{Q}$ einer Menge $A \subseteq X$ enthält eine abzählbare Überdeckung.
2. Jede Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{G}$ enthält eine abzählbare Basis.

Bem.

- Jeder A_2-Raum ist auch LINDELÖF-Raum.
- Ein topologisches Produkt $X = \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist genau dann A_2-Raum, wenn alle X_λ A_2-Räume und mit abzählbar vielen Ausnahmen indiskret sind.

Def. 33 X heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare, dichte Teilmenge von X gibt.

Bem. Separabilität ist nicht erblich.

Bsp.

- $(\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$ ist separabel.
- Ist X indiskret, so ist X auch separabel.
- Ist X überabzählbar und diskret, so ist X nicht separabel.
- Jeder A_2-Raum ist separabel.

16 Trennungsaxiome

Def. 34

1. X heißt T_0-*Raum*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt:
$$\exists\, U \in \mathfrak{U}(x): \quad y \notin U \qquad \vee \qquad \exists\, U \in \mathfrak{U}(y): \quad x \notin U.$$
2. X heißt T_1-*Raum*, wenn für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt:
$$\exists\, U \in \mathfrak{U}(x): \quad y \notin U \qquad \wedge \qquad \exists\, U \in \mathfrak{U}(y): \quad x \notin U.$$

Bem.

- T_0 und T_1 sind erblich, topologisch und produktinvariant.
- X ist genau dann T_0-Raum, wenn für je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ gilt $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$.
- Ist X ein T_1-Raum, so ist X ein T_0-Raum. Die Umkehrung ist i.A. falsch.
- X ist genau dann T_1-Raum, wenn jede einpunktige Menge abgeschlossen ist.

Satz 61 Sei X ein T_1-Raum. Dann gilt:

1. X ist diskret.
2. Für jeden Häufungspunkt x von $A \subseteq X$ gilt
$$\forall \quad U \in \mathfrak{U}(x): \qquad |U \cap A| = \infty$$

Satz 62 Sei X sowohl A_1- als auch T_1-Raum. Weiter sei $x \in X$ ein Häufungspunkt von $A \subseteq X$. Dann existiert eine gegen x konvergente Folge (x_n) in A mit paarweise verschiedenen Punkten x_n.

Def. 35 X heißt T_2-*Raum* (oder Hausdorff-*Raum* oder *separiert*), wenn für je zwei Punkte $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gilt:
$$\exists \quad U \in \mathfrak{U}(x), V \in \mathfrak{U}(y): \qquad U \cap V = \emptyset$$

Bem.

- Ist X ein T_2-Raum, so ist X auch ein T_1-Raum. Die Umkehrung ist i.A. falsch.
- T_2 ist erblich, topologisch und produktinvariant.

Satz 63 In einem T_2-Raum hat jede konvergente Folge genau einen Limes.

Satz 64 Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. X ist ein T_2-Raum
2. Jeder konvergente Filter hat einen eindeutig bestimmten Limes.

3. $D := \{(x,x) : x \in X\}$ ist abgeschlossen in $X \times X$.

Satz 65 Sei Y ein T_2-Raum und $f, g : X \to Y$ stetig. Dann gilt

1. $F := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen.
2. Ist $A \subseteq X$ dicht, so gilt $f|_A = g|_A \implies f = g$.
3. $\operatorname{graph} f := \{(x, f(x)) : x \in X\} \subseteq X \times Y$ ist abgeschlossen.

17 T_3-Räume und reguläre Räume

Def. 36 X heißt *T_3-Raum*, wenn für alle abgeschlossenen Mengen $F \subseteq X$ und für alle Punkte $x \in F^{\complement}$ gilt:

$$\exists \quad U \in \mathfrak{U}(F), V \in \mathfrak{U}(x) : \qquad U \cap V = \emptyset.$$

X heißt *regulär*, wenn X sowohl T_1-Raum als auch T_3-Raum ist.

Bem.

- Ist X ein T_3-Raum, so ist X nicht notwendig ein T_2-Raum.
- Ist X ein T_2-Raum, so ist X nicht notwendig ein T_3-Raum.
- Nicht jeder T_3-Raum ist regulär.
- Ist X regulär, so ist X ein T_2-Raum.
- Regularität und T_3 sind erblich, topologisch und produktinvariant.

Satz 66 $(X, \mathfrak{G})$ ist genau dann T_3-Raum, wenn gilt:

$$\forall \quad G \in \mathfrak{G} \quad \forall \quad x \in G \quad \exists \quad H \in \mathfrak{G} : \qquad x \in H, \overline{H} \subseteq G.$$

Bem. X ist genau dann T_3-Raum, wenn für jedes $x \in X$ die abgeschlossenen Umgebungen von x eine Umgebungsbasis bilden.

Def. 37 X heißt *vollständig regulär*, wenn X ein T_1-Raum ist und zu jeder abgeschlossenen Menge $\emptyset \neq F \subseteq X$ ein $x \in F^{\complement}$ und eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ mit $f(x) = 0$ und $f(F) = \{1\}$ existieren. In diesem Fall heißt f TYCHONOFF-*Abbildung* zu X und F.

Bem.

- Ist X vollständig regulär, so ist X regulär. Die Umkehrung ist i.A. falsch.
- Vollständige Regularität ist erblich, topologisch und produktinvariant.

Satz 67 (Satz von TYCHONOFF) X ist genau dann vollständig regulär, wenn X homöomorph zu einem Unterraum S eines Würfels $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} [0,1]$ ist.

18 T_4-Räume und normale Räume

Def. 38 X heißt T_4-Raum, wenn für je zwei nichtleere, abgeschlossene, disjunkte Mengen $F_1, F_2 \subseteq X$ gilt:

$$\exists \quad U \in \mathfrak{U}(F_1) \quad \exists \quad V \in \mathfrak{U}(F_2): \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Bem.

- Ist X ein T_4-Raum, so ist X nicht notwendig T_3-Raum.
- Ist X ein T_3-Raum, so ist X nicht notwendig T_4-Raum.
- T_4 ist topologisch, aber nicht erblich und nicht produktinvariant.
- Ist X ein T_3-Raum und ein LINDELÖF-Raum, so ist X ein T_4-Raum.

Satz 68 X ist genau dann T_4-Raum, wenn gilt: Für alle offenen Mengen $G \subseteq X$ und alle abgeschlossenen Mengen $F \subseteq X$ existiert eine offene Menge $H \subseteq X$ mit $F \subseteq H$ und $\overline{H} \subseteq G$.

Satz 69 (URYSOHNsches Lemma) X ist genau dann T_4-Raum, wenn zu je zwei nichtleeren, disjunkten, abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2 \subseteq X$ eine stetige Abbildung $f : X \to [0,1]$ existiert mit $f(F_1) = \{0\}$ und $f(F_2) = \{1\}$.

Bem. Ein solches f heißt URYSOHN-*Abbildung* zu E und F.

Satz 70 (Fortsetzungssatz von TIEZE) X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn gilt: Ist $\emptyset \neq F \subseteq X$ abgeschlossen und $f : F \to [-1,1]$ stetig, so hat f eine stetige Fortsetzung auf X.

Def. 39 X heißt *normal*, wenn X sowohl T_1-Raum, als auch T_4-Raum ist.

19 Kompakte Mengen und Räume

Def. 40 $A \subseteq X$ heißt *kompakt*, wenn sich aus jeder offenen Überdeckung von A eine endliche Überdeckung auswählen läßt.

Bsp.

- Betrachte $(X, \mathfrak{G}) = (\mathbb{R}^n, \mathcal{R}^n)$. Dann gilt nach dem Satz von HEINE-BOREL: $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn A abgeschlossen und beschränkt ist.
- Jede endliche Menge ist kompakt.

Satz 71 Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. X ist kompakt.
2. Jedes abgeschlossene System $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit der endlichen Abbildungseigenschaft hat einen nichtleeren Schnitt.
3. Jeder Filter auf X besitzt einen Berührpunkt.

Satz 72 Ist X kompakt, so ist jede abgeschlossene Menge $F \subseteq X$ kompakt.

Satz 73 Sei X ein T_2-Raum, $A \subseteq X$ kompakt und $x \in A^{\complement}$. Dann gilt:

1. $\exists \quad U \in \mathfrak{U}(A) \quad \exists \quad V \in \mathfrak{U}(x): \qquad U \cap V = \emptyset.$
2. A ist abgeschlossen.
3. Ist X kompakt, dann ist X normal.

Satz 74 Seien X und Y topologische Räume und $f: X \to Y$ stetig. Dann gilt: Ist $A \subseteq X$ kompakt, so ist $f(A) \subseteq Y$ kompakt.

Satz 75 Sei X kompakt und $f: X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\exists \quad x_0 \in X \quad \forall \quad x \in X: \qquad f(x) \leq f(x_0).$$

Satz 76 Sei X kompakt, Y ein T_2-Raum und $f: X \to Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f topologisch.

Satz 77 (Satz von TYCHONOFF) Ein Produktraum $X = \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ist genau dann kompakt, wenn jeder Koordinatenraum X_λ $(\lambda \in \Lambda)$ kompakt ist.

Bsp. Jeder Würfel $[0,1]^\Lambda := \prod\limits_{\lambda \in \Lambda} [0,1]$ ist kompakt.

Satz 78 X ist genau dann vollständig regulär, wenn X homöomorph zu einem Unterraum eines kompakten T_2-Raums ist.

Def. 41 X heißt *lokal-kompakt*, wenn zu jedem Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung existiert.

Bsp.

- $\mathbb{R}^m$ ist lokal-kompakt: Zu $x \in \mathbb{R}^m$ ist $\overline{U_1(x)}$ eine kompakte Umgebung.
- Ist X diskret, so ist X lokal-kompakt.
- Ein T_2-Raum, in dem jeder Punkt $x \in M$ eine zum $\mathbb{R}^n$ homöomorphe Umgebung besitzt, heißt M (n-dimensionale) *Mannigfaltigkeit*. Jede Mannigfaltigkeit ist lokal-kompakt.
- Betrachte $X = \mathbb{Q}$ versehen mit der Spurtopologie von $\mathbb{R}$. Dann ist X nicht lokal-kompakt.
- Betrachte
$$T := \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$
versehen mit der Spurtopologie des $\mathbb{R}^2$. Dann ist T nicht lokal-kompakt.
- Ist X kompakt, so ist X lokal-kompakt.
- Lokal-Kompaktheit ist topologisch, aber nicht erblich.

Satz 79 Sei X lokal-kompakt und $F \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist F als Unterraum von X lokal-kompakt.

Bem. Seien Y ein topologischer Raum und X lokal-kompakt. $f : X \to Y$ sei surjektiv, stetig und offen. Dann ist Y lokal-kompakt.

Def. 42 X und X^* seien topologische Räume, X sei Unterraum von X^* und liege dicht in X^*. Weiter sei X^* kompakt. Dann heißt X^* *Kompaktifizierung* von X.

Bsp.

- Ist $X = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$, so ist $X^* = [a, b]$ eine Kompaktifizierung von X.
- Betrachte $\mathbb{R}_{\pm\infty} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ als Erweiterung der reellen Zahlen ($-\infty$ und ∞ seien zunächst bedeutungslose Symbole). Für $x \in \mathbb{R}$ gelte $x < \infty$ und $-\infty < x$. Die Menge aller Intervalle $(a, b), [-\infty, c), (c, \infty]$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ bildet die Basis einer Topologie $\mathfrak{G}_{\pm\infty}$. Der Raum $X := (\mathbb{R}_{\pm\infty}, \mathfrak{G}_{\pm\infty})$ ist kompakt, $\mathbb{R}$ ist Unterraum von X und liegt dicht in X. Damit ist X eine Kompaktifizierung von $\mathbb{R}$.

Satz 80 X sei nicht kompakt, $\infty \notin X$ ein „neues" Element. Auf $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ wird durch

$$\mathfrak{G}_\infty := \mathfrak{G} \cup \{G \cup \{\infty\} : G \in \mathfrak{G}, G^{\complement} \text{ kompakt}\}$$

eine Topologie definiert und $(X_\infty, \mathfrak{G}_\infty)$ ist eine Kompaktifizierung von $(X, \mathfrak{G})$. X_∞ heißt *Einpunktkompaktifizierung* von X.

Satz 81 (Satz von Alexandroff) Sei X_∞ die Einpunktkompaktifizierung von X. Dann gilt: X_∞ ist genau dann T_2-Raum, wenn X lokal-kompakter T_2-Raum ist.

Bem.

- Jeder lokal-kompakte T_2-Raum ist vollständig regulär.
- In einem lokal-kompaktem T_2-Raum X bilden für jeden Punkt $x \in X$ die kompakten Umgebungen eine Umgebungsbasis.

20 Zusammenhängende Mengen und Räume

Def. 43 Sei $A \subseteq X$. Weiter seien $P, Q \subseteq X$ nichtleer, disjunkt und offen. (P, Q) heißt *Partition* von A, falls gilt $P \cup Q = A$. Schreibweise in diesem Fall: $A = P \mid Q$.

Bem.

- Gilt $A = P \mid Q$, so sind „offen in A" und „abgeschlossen in A" äquivalent.
- Für eine echte Zerlegung (P, Q) von A gilt $A = P \mid Q$ genau dann, wenn gilt $P \cup \overline{Q} = \emptyset$, $\overline{P} \cap Q = \emptyset$.

Def. 44 $A \subseteq X$ heißt *zusammenhängend*, wenn es keine Partition von A gibt. Ist $A = X$, so heißt X *zusammenhängender Raum.*

Bsp.

- $\mathbb{R}$ ist ein zusammenhängender Raum.
- Jede einpunktige Menge $\{x\}$ $(x \in X)$ ist zusammenhängend.

Satz 82 X ist genau dann zusammenhängend, wenn $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die gleichzeitig offen und abgeschlossen sind.

Satz 83 $A \subseteq X$ sei zusammenhängend und es sei $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$. Dann ist B zusammenhängend.

Satz 84 Seien $A, B \subseteq X$ disjunkt. A sei zusammenhängend und es gelte $A \cap B^{\complement} \neq \emptyset$. Dann gilt $A \cap \partial B \neq \emptyset$.

Def. 45 Seien $A \subseteq X$ und $x, y \in X$. x und y heißen *zusammenhängend* in A, wenn es eine zusammenhängende Teilmenge T von A gibt, die x und y enthält.

Bem. Sind je zwei Punkte $x, y \in A$ zusammenhängend in A, so ist A zusammenhängend.

Satz 85 Sind $A, B \subseteq X$ zusammenhängend und nicht disjunkt, so ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Satz 86 Sei $\mathfrak{A}$ ein System zusammenhängender Teilmengen von X. Existiert ein $B \subseteq X$ mit

$$\forall \quad A \in \mathfrak{A} : \qquad A \cap B \neq \emptyset,$$

so ist $B \cup \bigcup\limits_{A \in \mathfrak{A}} A$ zusammenhängend.

Satz 87 Sei $A \subseteq X$ zusammenhängend und $\mathfrak{Q}$ eine offene Überdeckung von A. Dann gibt es zu je zwei Punkten $x, y \in A$ eine einfache Kette von Mengen aus $\mathfrak{Q}$, die x und y verbinden.

Satz 88 X und Y seien topologische Räume und $f : X \to Y$ sei stetig. Dann gilt: Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so ist auch $f(A)$ zusammenhängend.

Satz 89 (Zwischenwertsatz) Sei X zusammenhängend, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig und $a, b \in X$ mit $f(a) < f(b)$. Dann gilt:

$$\forall \quad c \in (f(a), f(b)) \quad \exists \quad x \in X : \qquad f(x) = c.$$

Index

Z