Übungsblatt Algorithmische Methoden

für den 13. Jänner

1. Die Operation $\mathit{Verschiebe}_{\mathcal{Z}_B}(a,n)$ sei definiert als

   $\mathit{Verschiebe}_{\mathcal{Z}_B}(a,n)$ liefert $b \in \mathcal{Z}_B$, indem die Ziffern in $a \in \mathcal{Z}_B$ um $n \in \mathbb{N}_0$ Stellen nach links verschoben und am Ende mit Nullen aufgefüllt wird, d.h.

   $$L(b) = L(a) + n \quad \text{und} \quad b_i = \begin{cases} a_i & \text{für } i \leq L(a) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Zeigen Sie, dass für beliebige Basis $B \geq 2$ und $b = \mathit{Verschiebe}_{\mathcal{Z}_B}(a,n)$ gilt: $b = a \cdot B^n$. Auf welche Ausnahme(n) ist zu achten?

2. Zeigen Sie, dass $\equiv_m$ eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

3. Sei
   $$(z,n) \sim (z',n') :\Leftrightarrow z \cdot n' = n \cdot z'.$$
   Zeigen Sie, dass die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ ist.

4. Sei $\sim$ wie in Beispiel 3. Auf den Äquivalenzklassen von $\sim$ definieren wir Addition und Multiplikation wie folgt:

   $$[(z,n)]_\sim + [(z',n')]_\sim := [(z \cdot n' + z' \cdot n, n \cdot n')]_\sim$$
   $$[(z,n)]_\sim \cdot [(z',n')]_\sim := [(z \cdot z', n \cdot n')]_\sim.$$

   Zeigen Sie, dass diese Addition und Multiplikation von der Wahl der konkreten Repräsentanten unabhängig sind.