# Algorithmische Methoden 1

Wolfgang Windsteiger

RISC Institut

# Das Thema der heutigen Vorlesung

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, Algorithmen

# Beispiele

**Problemstellung (Reelle Lösung einer quadratischen Gleichung).**

| | |
|---|---|
| Gegeben: | $p, q$ |
| mit: | $p, q \in \mathbb{R}$. |
| Gesucht: | $x$ |
| mit: | $x \in \mathbb{R}$ und $x^2 - 2px + q = 0$. |

- Eingabevariablen: $p, q$.
- Ausgabevariable: $x$.
- $p = 2$ und $q = -5$ erfüllen die Eingabebedingung $\rightsquigarrow$ zulässige Eingaben.
- Lösen der Gleichung $x^2 - 4x - 5 = 0$ für $x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ eine Instanz dieser Problemstellung.

# Beispiele

**Problemstellung (Division mit Rest natürlicher Zahlen).**

| | |
|---|---|
| Gegeben: | $m, n \in \mathbb{N}$. |
| Gesucht: | $q, r \in \mathbb{N}_0$ |
| mit: | $m = nq + r$ und $r < n$. |

- Typangabe für die Variablen direkt in der Auflistung der Variablen.
- Die Eingabebedingung kann in solchen Fällen unter Umständen zur Gänze entfallen.

# Lösung eines Problems

- Quadratische Gleichung: Instanzen mit $p^2 - q < 0$ besitzen keine Lösung.
- Quadratische Gleichung: Instanzen mit $p^2 - q > 0$ besitzen mehrere (zwei) Lösungen.
- Wenn möglich: Problem so spezifizieren, dass jede Instanz genau eine Lösung besitzt.
- Charakterisierung des Problems durch Abbildung $\varphi$, d.h. für alle $\mathtt{x}$ mit $\mathcal{I}_{\mathtt{x}}$

$$\varphi(\mathtt{x}) := \text{ dasjenige } \mathtt{y} \text{ mit } \mathcal{O}_{\mathtt{x},\mathtt{y}}. \tag{1}$$

# Existenzbeweis

## Satz (Quadratische Gleichung)

*Für alle $p, q \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 - 2px + q = 0$.*

- Der Beweis besteht aus Herleitung einer Formel für $x$.
- Formel funktioniert nur für $p^2 - q \geq 0$.
- Eindeutigkeit durch Spezialisierung auf eine bestimmte Lösung.
- $\rightsquigarrow$ Modifikation der Spezifikation!

Dann: $\varphi$ explizit durch

$$\varphi(p, q) := p - \sqrt{p^2 - q} \tag{2}$$

gegeben.

# Existenzbeweis

## Satz (Division natürlicher Zahlen)

*Zu je zwei Zahlen* $m, n \in \mathbb{N}$ *existieren eindeutig bestimmte* $q, r \in \mathbb{N}_0$ *mit* $m = nq + r$ *und* $r < n$.

Beweis: …
Dann: $\varphi$ implizit durch

$$\varphi(m, n) := \text{ diejenigen } q, r \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } m = nq + r \wedge r < n \tag{3}$$

gegeben.

# Von der Problemspezifikation zum Algorithmus

- $\varphi$ wie in (1) erklärt im Allgemeinen nicht, wie $\varphi(\mathtt{x})$ tatsächlich berechnet werden kann.
- Die algorithmische Lösung eines Problems besteht aus der Angabe einer Rechenvorschrift zur Bestimmung von $\varphi(\mathtt{x})$ für jede Probleminstanz.

**Begriffsbildung (Algorithmus)**

*Ein Algorithmus ist eine präzise Vorschrift zur Durchführung einer endlichen Folge von Elementaroperationen, um Probleme einer bestimmten Klasse zu lösen.*

# Algorithmen

## Algorithmus *QuadGlgI*: Quadratische Gleichung, Variante I

$$\begin{array}{l} \xi_1 \leftarrow p \cdot p \\ \xi_2 \leftarrow \xi_1 - q \\ \xi_3 \leftarrow \sqrt{\xi_2} \\ x \leftarrow p - \xi_3 \\ \textbf{return } x \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Aufruf:} & QuadGlgI(p, q) \\ \text{Eingabe:} & p, q \in \mathbb{R} \\ \text{mit:} & p^2 - q \geq 0. \\ \text{Ausgabe:} & x \in \mathbb{R} \\ \text{mit:} & x^2 - 2px + q = 0 \text{ und } x \leq p. \end{array}$$

## Algorithmus *QuotRestN*: Division mit Rest in $\mathbb{N}$

$$\begin{array}{l} q \leftarrow 0, r \leftarrow m \\ \textbf{while } r \geq n \\ \quad q \leftarrow q + 1 \\ \quad r \leftarrow r - n \\ \textbf{return } (q, r) \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{Aufruf:} & QuotRestN(m, n) \\ \text{Eingabe:} & m, n \in \mathbb{N}. \\ \text{Ausgabe:} & q, r \in \mathbb{N}_0 \\ \text{mit:} & m = nq + r \text{ und } r < n. \end{array}$$

# Bestandteile der Algorithmenbeschreibung

- Pseudsocode
- Algorithmenspezifikation $\rightsquigarrow$ Problemspezifikation
- Elementaroperationen
- Durch Algorithmus für $\varphi$ kann $\varphi$ explizit definiert werden, z.B. $\varphi(m, n) := QuotRestN(m, n)$.