Algorithmische Methoden 1

Wolfgang Windsteiger

RISC Institut

Das Thema der heutigen Vorlesung

Einführende Beispiele

Fehlerbegriffe

Definition (Absoluter und relativer Fehler)

Sei $\tilde{z} \in \mathbb{R}$ eine Näherung von $z \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$\tilde{z} - z \tag{4}$$

den absoluten Fehler von $\tilde{z}$. Ist $z \neq 0$, so ist

$$\varepsilon_{\tilde{z},z} = \frac{\tilde{z} - z}{z} \tag{5}$$

der relative Fehler von $\tilde{z}$.

Symbolisches und numerisches Rechnen

- *QuadGlgI* in *Mathematica*.
- *QuadGlgI* in MATLAB.
- Symbolisches Rechnen.
- Numerisches Rechnen mit Maschinenzahlen und Rundung.

Iterative Algorithmen

Problemstellung (Wurzel aus r).

Gegeben: $r \in \mathbb{R}^+$
Gesucht: $x \in \mathbb{R}^+$
mit: $x^2 = r$.

Wurzelziehen steht als Elementaroperation nicht zur Verfügung.

- Wegen
$$\sqrt{r} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r} + \frac{r}{\sqrt{r}}\right) \tag{6}$$
ist $\sqrt{r}$ eine Lösung der Gleichung
$$x = \Phi(x) \tag{7}$$
mit
$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{r}{x}\right) \tag{8}$$
- Wählen Startwert $x_0 > 0$ und definieren die Iterationsfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ durch
$$x_{n+1} = \Phi(x_n) \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{9}$$
- Idee dahinter: bestimme Folgenelemente bis sich nichts mehr ändert! Wenn $x_n = x_{n+1}$, dann ist der Fixpunkt erreicht $\rightsquigarrow$ Fixpunktiteration $\rightsquigarrow$ *Mathematica*.

Warum funktioniert das Verfahren?

- Alle x_n echt positiv $\rightsquigarrow$ wohldefiniert.
- Ungleichung zwischem dem geometrischen und arithmetischen Mittel
$$\sqrt{r} = \sqrt{x_n \cdot \frac{r}{x_n}} \leq \frac{x_n + \frac{r}{x_n}}{2} = \Phi(x_n) = x_{n+1},$$
also folgt $r \leq x_n^2$ für $n \geq 1$, also $\frac{r}{x_n} \leq x_n$.
- Die Folge ist also monoton fallend und durch $\sqrt{r}$ nach unten beschränkt. Aus der Analysis: Folge hat einen Grenzwert $\bar{x}$
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} \tag{10}$$
- Da Φ stetig ist: $\bar{x} = \Phi(\bar{x})$ und damit $\bar{x}^2 = r$ gilt. Da alle Folgenglieder größer gleich $\sqrt{r}$ sind, erhält man schließlich $\bar{x} = \sqrt{r}$.

Algorithmische Aspekte dieses Verfahrens

Algorithmus *ItWurzelI* : Iterative Näherung von $\sqrt{r}$, Variante I

$x \leftarrow x_0$
while $\mathcal{A}$ nicht erfüllt
  $x \leftarrow \frac{1}{2}(x + \frac{r}{x})$
return x

Aufruf: $\mathit{ItWurzelI}(r, x_0)$
Eingabe: $r, x_0 \in \mathbb{R}^+$
Ausgabe: $x \in \mathbb{R}^+$
mit: x als Näherung von $\sqrt{r}$, die vom Startwert x_0 und dem Abbruchskriterium $\mathcal{A}$ abhängt.

Algorithmische Aspekte dieses Verfahrens

- Der Algorithmus basiert auf den auf $\mathbb{R}$ definierten Elementaroperationen $+$ und $/$, erst durch ihn wird das Wurzelziehen auf $\mathbb{R}^+$ zur Elementaroperation.
- Das Konvergenzresultat (10) garantiert, dass $\sqrt{r}$ – unter Vernachlässigung etwaiger Fehler aufgrund des Computermodells von $\mathbb{R}$ – mit Hilfe des Algorithmus *ItWurzelI* beliebig angenähert werden kann.
- Der Algorithmus liefert also nicht exakt die gesuchte Lösung der Problemspezifikation, was sich auch darin widerspiegelt, dass die Ausgabebedingung des Algorithmus nicht mit jener der Problemstellung übereinstimmt.
- Zusätzlich weicht auch die Eingabe des Algorithmus von jener der Problemspezifikation durch Hinzunahme des Startwertes x_0 ab.
- Der Abbruch der Schleife nach endlich vielen Schritten wird durch ein Abbruchskriterium $\mathcal{A}$ bewerkstelligt.

Banachscher Fixpunktsatz

Satz (Banachscher Fixpunktsatz)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ *mit* $a < b$ *und* $\Phi : [a, b] \to [a, b]$. *Falls* Φ *für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *die Lipschitzbedingung*

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| \leq L|x - y| \tag{11}$$

mit einer Lipschitzkonstanten $L < 1$ *erfüllt, existiert genau ein Fixpunkt* $\bar{x}$ *in* $[a, b]$ *mit* $\Phi(\bar{x}) = \bar{x}$. *Weiters konvergiert für alle* $x_0 \in [a, b]$ *die durch*

$$x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

definierte Folge gegen $\bar{x}$, *und es gilt die Abschätzung*

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{L^n}{1 - L}|x_0 - x_1|. \tag{12}$$

Banachscher Fixpunktsatz

Die Abschätzung

$$|x_n - \bar{x}| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_0 - x_1|.$$

können wir für ein Abbruchskriterium verwenden!

Algorithmus *ItWurzelII* : Iterative Näherung von $\sqrt{r}$, Variante II

$x_1 \leftarrow \frac{1}{2}(x_0 + \frac{r}{x_0})$
$n \leftarrow 1,\ x \leftarrow x_1$
while $\frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0| > \eta$
  $x \leftarrow \frac{1}{2}(x + \frac{r}{x})$
  $n \leftarrow n + 1$
return x

Aufruf: $\mathit{ItWurzelII}(r, x_0, \eta)$
Eingabe: $r, x_0, \eta \in \mathbb{R}^+$.
Ausgabe: $x \in \mathbb{R}^+$
mit: $|x - \sqrt{r}| \leq \eta$.

Rundungsfehler und deren Fortpflanzung

- Lösung der quadratischen Gleichung:

$$p-\sqrt{p^2-q}=(p-\sqrt{p^2-q})\cdot\frac{p+\sqrt{p^2-q}}{p+\sqrt{p^2-q}}=\frac{q}{p+\sqrt{p^2-q}}$$

- `QuadGlgI(`$5\cdot 10^{11}-1/20,-10^{11}$`)` vs. `QuadGlgII(`$5\cdot 10^{11}-1/20,-10^{11}$`)`
- $\mathbb{R}$ am Computer $\rightsquigarrow$ obere/untere Schranken und Lücken $\rightsquigarrow$ Rundung.
- **eps**=relative Maschinengenauigkeit= Abstand zwischen 1.0 und der nächst größeren im Modell darstellbaren Zahl

Rundungsabbildung / Rundungsfehler

$\mathrm{rd}(x) = x(1+\varepsilon_x)$ mit relativem Rundungsfehler ε_x, wobei

$$|\varepsilon_x| \leq \mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{eps}.$$

Beispiel

QuadGlgI berechnet Näherungslösung $\tilde{x} = -0.099975585937500$ *anstelle von* $x = -0.1$.

$$|\frac{\tilde{x}-x}{x}| = 2.4414 \cdot 10^{-4}$$

Der maximale relative Fehler $\boldsymbol{u} = 1.11 \cdot 10^{-16}$ *in den Daten* p *und* q *aufgrund der Rundung bei der Eingabe wurde also um den Faktor* $2.1990 \cdot 10^{12}$ *verstärkt.*