Algorithmische Methoden 1

Wolfgang Windsteiger

RISC Institut

Das Thema der heutigen Vorlesung

Einführende Beispiele

Diskretisierte Ersatzprobleme

Problemstellung (Umfang des Kreises mit Radius $1/2$).

Gegeben:	—.
Gesucht:	$U \in \mathbb{R}^+$
mit:	U ist Umfang des Kreises mit Radius $1/2$.

Approximiere Kreis durch ein regelmäßiges Vieleck mit Umfang $U_n \rightsquigarrow$ ersetze Originalproblem durch ein diskretisiertes Ersatzproblem.

Problemstellung (Umfang des regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecks).

Gegeben:	$n \in \mathbb{N}_0$
Gesucht:	$u \in \mathbb{R}^+$
mit:	$u = U_n$.

Lösung: $U_n = 6 \cdot 2^n \cdot l_n$, wobei (Sinussatz!)

$$l_n = \sin(\frac{\pi}{6 \cdot 2^n})$$

Satz von Taylor

Satz (Satz von Taylor)

Seien $k \in \mathbb{N}$ *und* $x_0, x \in \mathbb{R}$ *mit* $x \neq x_0$. *Weiters sei die Funktion* $f : [x_0, x]$ *(bzw.* $[x, x_0]$*)* $\to \mathbb{R}$ k*-mal stetig differenzierbar und in* (x_0, x) *(bzw.* (x, x_0)*) existiere die* $k+1$*-te Ableitung* $f^{(k+1)}$. *Dann gibt es ein* $\theta \in (0,1)$, *sodass*

$$f(x) = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i}_{T_k(x)} + \frac{f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(k+1)!}(x - x_0)^{k+1}.$$

Zudem gilt für den Fehler zwischen $f(x)$ *und* $T_k(x)$ *die Abschätzung*

$$|f(x) - T_k(x)| \leq \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{\theta \in (0,1)} |f^{(k+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))|. \qquad (13)$$

Fehlerabschätzung

Mit $f(x) = \sin(x)$, $x_0 = 0$ und $k = 2$ folgt aus (13) zunächst

$$|\sin(x) - x| \leq \frac{x^3}{6} \quad \text{für } x > 0.$$

Für $x = \frac{\pi}{6 \cdot 2^n}$:

$$|U_n - U| \leq \frac{U^3}{6(6 \cdot 2^n)^2}, \tag{14}$$

und daher

$$\lim_{n \to \infty} U_n = U. \tag{15}$$

Unterproblem: Rekursive Berechnung von l_n

Problemstellung (Seitenlänge des regelmäßigen $6 \cdot 2^n$-Ecks).

$$\begin{aligned} \text{Gegeben:} \quad & n \in \mathbb{N}_0 \\ \text{Gesucht:} \quad & l \in \mathbb{R}^+ \\ \text{mit:} \quad & l = l_n. \end{aligned}$$

- Aus Satz von Pythagoras:

$$l_n = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - l_{n-1}^2}} \tag{16}$$

- Beziehung zwischen l_n und l_{n-1}
- Berechnung von $l_n \rightsquigarrow$ Berechnung von l_{n-1}
- Nach n Reduktionen $\rightsquigarrow$ Berechnung von l_0 (bekannt!).

Rekursiver Algorithmus

Numerische Berechnung günstiger durch

$$l_n = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - l_{n-1}^2}} = \frac{l_{n-1}}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - l_{n-1}^2})}}, \tag{17}$$

Algorithmus *SeitenlängeR*: Rekursive Berechnung der Seitenlänge des $6 \cdot 2^n$-Ecks

if $n = 0$
  $l \leftarrow 0.5$
else
  $l \leftarrow SeitenlängeR(n-1)$
  $l \leftarrow \frac{l}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-l^2})}}$
return l

Aufruf: $SeitenlängeR(n)$
Eingabe: $n \in \mathbb{N}_0$
Ausgabe: $l \in \mathbb{R}^+$
mit: $l = l_n$.