Algorithmische Methoden 1

Wolfgang Windsteiger

RISC Institut

Das Thema der heutigen Vorlesung

Kondition des Problems und Eigenschaften von Algorithmen

Kondition des Problems

- Zentrale Fragestellung: Wie wirken sich Störungen in den Eingaben eines Problems auf die Lösung aus?
- Mathematisch: $\tilde{\mathtt{x}} - \mathtt{x}$ .... Fehler im Input
  $\varphi(\tilde{\mathtt{x}}) - \varphi(\mathtt{x})$ .... Fehler im Resultat
- Wir betrachten zunächst eindeutig lösbare Probleme über $\mathbb{R}$, also

$$\varphi : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \tag{18}$$

  mit geeignetem Definitionsintervall I.

Absolute und Relative Kondition

Definition (Absolute Kondition)

Sie φ wie in (18). Die absolute Kondition des Problems (φ, x) ist die kleinste Zahl κ_{abs}, für die

$$|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)| \lesssim \kappa_{\text{abs}} |\tilde{x} - x| \quad \text{für } \tilde{x} \to x \tag{19}$$

erfüllt ist.

Definition (Relative Kondition)

Sei φ wie in (18). Die relative Kondition des Problems (φ, x) mit $\varphi(x) \neq 0$ und $x \neq 0$ ist die kleinste Zahl κ_{rel}, für die

$$\frac{|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)|}{|\varphi(x)|} \lesssim \kappa_{\text{rel}} \frac{|\tilde{x} - x|}{|x|} \quad \text{für } \tilde{x} \to x \tag{20}$$

erfüllt ist.

Begriffe

Die Konditionszahl κ_{abs} beschreibt also die im ungünstigsten Fall auftretende Verstärkung des Betrags des absoluten Datenfehlers $\tilde{x} - x$. Sie hängt sowohl von φ als auch von x ab. Existiert so eine Zahl nicht (formal $\kappa_{\text{abs}} = \infty$), so ist das Problem schlecht oder inkorrekt gestellt. Bei $\kappa_{\text{abs}} \leq 1$ nennt man das Problem gut konditioniert oder auch datenstabil, bei $\kappa_{\text{abs}} > 1$ ist es schlecht konditioniert oder dateninstabil. Bei Verwendung von κ_{rel} ist die Trennung zwischen gut und schlecht konditioniert nicht mehr klar festgelegt. Richtwerte für Datenstabilität können neben $\kappa_{\text{rel}} = 1$ dann auch $\kappa_{\text{rel}} = 10, 100, 1000$ sein.

Größenordnungen

Bezeichnung (Symbole $\eqsim$ und $\lesssim$)

Seien g und h Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Wir schreiben kurz

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}) &\eqsim h(\tilde{x}) && \textit{für } \tilde{x} \to x, \ \textit{bzw.} \\ g(\tilde{x}) &\lesssim h(\tilde{x}) && \textit{für } \tilde{x} \to x. \end{aligned}$$

anstelle von

$$\begin{aligned} g(\tilde{x}) &= h(\tilde{x}) + o(|\tilde{x} - x|) && \textit{für } \tilde{x} \to x, \ \textit{bzw.} \\ g(\tilde{x}) &\leq h(\tilde{x}) + o(|\tilde{x} - x|) && \textit{für } \tilde{x} \to x \end{aligned}$$

Landau-Notation

Bezeichnung (Landau-Symbol o für reelle Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Zu gegebenem* $x \in \mathbb{R}$ *beschreibt der Ausdruck* $o(f(\tilde{x}))$ *für* $\tilde{x} \to x$ *eine Funktion* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, für die*

$$\lim_{\tilde{x} \to x} \frac{g(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} = 0$$

gilt. Dafür verwendet man die Schreibweise

$$g(\tilde{x}) = o(f(\tilde{x})) \quad \textit{für } \tilde{x} \to x.$$

Intuitiv beschreibt $o(f(\tilde{x}))$ für $\tilde{x} \to x$ eine nicht näher spezifizierte Funktion, die in der Nähe von x viel kleiner als f ist.

Beispiele

Beispiel

Wegen $\lim_{\tilde{x}\to 0} 3\tilde{x} + \tilde{x}^2 = 0$ *gilt*

$$3\tilde{x}^2 + \tilde{x}^3 = o(\tilde{x}) \quad \textit{für } \tilde{x} \to 0.$$

Beispiele

Beispiel

Sei φ *auf* $[\tilde{x}, x]$ *(bzw.* $[x, \tilde{x}]$*) stetig und wenigstens auf* $(\tilde{x}, x)$ *(bzw.* $(x, \tilde{x})$*) differenzierbar. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt dann*

$$\begin{aligned} \varphi(\tilde{x}) - \varphi(x) &= \varphi'(\xi)(\tilde{x} - x) \\ &= \varphi'(x)(\tilde{x} - x) + (\varphi'(\xi) - \varphi'(x)) \cdot (\tilde{x} - x) \qquad (21) \end{aligned}$$

für ein $\xi \in (\tilde{x}, x)$ *(bzw.* $(x, \tilde{x})$*). Ist* φ' *stetig, folgt*

$$\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x) = \varphi'(x)(\tilde{x} - x) + o(|\tilde{x} - x|) \quad \textit{für } \tilde{x} \to x. \qquad (22)$$

Durch Betragsbildung in (22) *erhält man die Abschätzung*

$$|\varphi(\tilde{x}) - \varphi(x)| \leq |\varphi'(x)||\tilde{x} - x| + o(|\tilde{x} - x|) \quad \textit{für } \tilde{x} \to x.$$

Darstellung der Konditionszahlen durch φ'

Ist φ stetig differenzierbar, so folgt aus (22)

$$\kappa_{\text{abs}} = |\varphi'(x)|. \tag{23}$$

Für relative Kondition:

$$\kappa_{\text{rel}} = \frac{|\varphi'(x)|}{|\varphi(x)|}|x|. \tag{24}$$

Eigenschaften von Algorithmen

Korrektheit: Das Resultat des Algorithmus erfüllt für alle möglichen Eingaben die Ausgabebedingung der Spezifikation. Korrektheitsaussage für *Algo*:

$$\mathcal{O}_{\mathtt{x},Algo(\mathtt{x})} \quad \text{für alle } \mathtt{x} \text{ mit } \mathcal{I}_{\mathtt{x}}. \tag{25}$$

$\rightsquigarrow$ Korrektheitsbeweis.

Stabilität: Welchen Einfluss hat der Algorithmus auf den Resultatsfehler?

Komplexität: Welcher (Rechen-)aufwand ist zur Abarbeitung des Algorithmus notwendig?