Einblick in das Thema Wachstums- und Zerfallsprozesse anhand von 4 konkreten Typen näher erläutert mit Hilfe von praktischen Beispielen

Einstieg:

Tritium (überschwerer Wasserstoff) ist radioaktiv mit einer Halbwertszeit (τ) von 12,26 Jahren. Tritium wird zur Altersbestimmung von Wein verwendet. Ein frischer Wein zeigt im Mittel 65,1 Zerfälle pro Liter und Minute. Ein Weinliebhaber kauft einen alten Jahrgang, von dem behauptet wird, er sei 50 Jahre alt. Eine Messung ergibt 7,5 Zerfälle pro Liter und Minute. Handelt es sich um einen Betrug oder hat der Wein tatsächlich das vorgegebene Alter? Innerhalb welcher Grenzen liegt das Alter des Weines, wenn die Messgenauigkeit 7,5±1,0 Zerfälle beträgt.

Oft stoßen wir im täglichen Leben auf ähnliche mathematische Probleme, bei denen verschiedene Arten von Wachstums- und Zerfallsvorgängen auftreten. Im Folgenden werden die vier wichtigsten Wachstumstypen (lineares, exponentielles, begrenztes und logistisches Wachstum) beschrieben und ihre Anwendungsgebiete mit praktischen Beispielen näher erläutert.

1. Lineares Wachstum bzw. lineare Abnahme

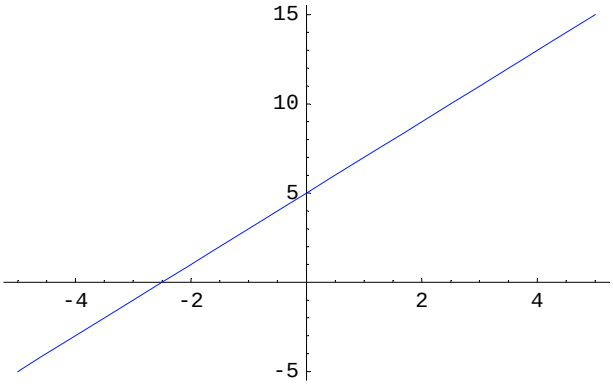
Das lineare Wachstum ist gleichbleibend. Die Wachstumsrate pro Zeiteinheit ändert sich nicht, also bleibt die Änderungsrate konstant. Dies verdeutlicht z.B. der Abbau von Alkohol im Blut. Mit Hilfe des linearen Wachstums kann die Polizei also feststellen, wie hoch der Blutalkoholspiegel zur Zeit des Unfalls war.

■ Rechnen mit linearem Wachstum:

Um mit dem linearen Wachstum zu rechnen,braucht man zuerst einen Anfangsbestand und eine Zahl für denZuwachs.-Der Zuwachs bleibt immer gleich (konstant),während der Bestand sich ändert.Als nächstes wird der Anfangsbestand mit dem Zuwachs addiert.Dadurch wird ein neuer Wert (Bestand (B neu)) ermittelt.Der Anfangsbestand wird dadurch zum alten Bestand (B alt).Nun wird B neu wieder mit dem Zuwachs addiert und wieder wird ein neuer Wert ermittelt.Also wird B neu zu B alt.Diese Rechnung kann man beliebig fortsetzen.

■ Formeln:

Zuwachs=K(onstant)
B neu=B alt+Zuwachs



- Graphics -

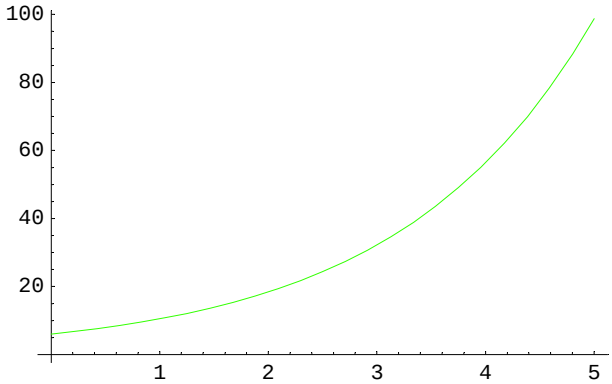
2. Exponentielles Wachstum bzw. Abnahme

Anders als beim linearen Wachstum erfolgt der Zuwachs beim exponentiellen Wachstum nicht konstant, sondern proportional zum vorhandenen Bestand. Hier ändert sich also die Wachstumsrate pro Zeiteinheit, indem sie mit dem vorhandenem Bestand multipliziert wird. Da manche Wachstumsvorgänge in der Natur so verlaufen, nennt man das exponentielle Wachstum auch natürliches Wachstum. Man kann damit aber nicht nur das Wachstum von Bakterien, Viren oder Tierarten ermitteln, sondern es dient z.B. auch zur Rechnung mit Zinseszinen.

■ Rechnen mit exponentiellem Wachstum:

Beim exponentiellen Wachstum braucht man zunächst einmal einen Anfangsbestand und einen Faktor.Der alte Bestand ändert sich nach jeder Rechnung.Wichtig ist,dass anders als beim linearen Wachstum der Zuwachs sich ändert,da er proportional zum vorhanden Bestand (Anfangsbestand oder B alt) erfolgt.Deswegen multipliziert man zuerst B alt mit dem Faktor.Ansonsten ist alles wie beim linearen Wachstum.Um B neu zu ermitteln,wird B alt mit dem Zuwachs addiert.

Zuwachs=Faktor*B alt
B neu=B alt+Zuwachs



- Graphics -

■ Herleitung der Formel des exponentiellen Wachstums anhand eines Beispiels:

Bei radioaktiven Stoffen wurde folgendes festgestellt:
Die in der Zeiteinheit zerfallende Menge ist zu der am Beginn dieser Zetieinheit vorhandenen Menge an unzerfallenem radioaktiven Stoff proportional.
Mathematisches Modell:

N(t).....Anzahl der Atome, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind

N(t)-N(z).....Anzahl der Atome, die im [t, z] zerfallen

$\frac{N(t)-N(z)}{z-t}$ .....Anzahl der Atome, die durchschnittlich pro Zeiteinheit im [t, z] zerfallen

$\frac{N(t)-N(z)}{z-t} \approx \lambda * N(t)$ bzw. $\frac{N(z)-N(t)}{z-t} \approx -\lambda * N(t)$ (durchschnittliche Zerfallsgeschwindigkeit)

Diese Beziehung ist umso genauer, je kleiner [t, z] ist. N nimmt nur ganzzahlige Werte an und ist sicher nicht differenzierbar. Für das mathematische Modell nähern wir die tatsächliche Anzahl durch eine stetige Funktion N(t) an. Wir nehmen an:

$\lim_{z \to t} \frac{N(z)-N(t)}{z-t} = N'(t) = -\lambda * N(t)$.....Zerfallsgesetz (λ = Zerfallskonstante)

Die Zerfallsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist also direkt proportional zur Anzahl der zu diesem Zeitpunkt noch nicht zerfallenen Atome.
Welche Funktion erfüllt diese Differentialgleichung $N'(t) = -\lambda * N(t)$?

$N(t)=e^t \rightarrow N'(t)= e^t =N(t)$ Die Formel muss nun nur mehr soweit abgeändert werden, dass sie auch λ beinhaltet.
$N(t)=e^{-\lambda t} \rightarrow N'(t)= -\lambda e^{-\lambda t}= -\lambda * N(t)$ Diese Formel erfüllt nun beinahe unsere Bediungen, aber N(0) ist in diesem Fall stets 1.
$N(t)=c * e^{-\lambda t} \rightarrow N'(t)=c (-\lambda)e^{-\lambda t}=-\lambda * N(t)$
$N(0)=c$

Zerfallsgesetz: N(t) = $N_0\, e^{-\lambda t}$

■ Beispiel:

Angabe siehe Einleitung:

w.w.: N_0 =65,1

N(12,26)= $\frac{65,1}{2}$

$\frac{65,1}{2} = 65,1 * e^{-\lambda * 12,26}$

λ=0.0565373

N(t)=65,1*$e^{-0.0565373\, t}$ ergibt sich als Formel

N(50)=3,853

8,5=65,1*$e^{-0.0565373\, t}$

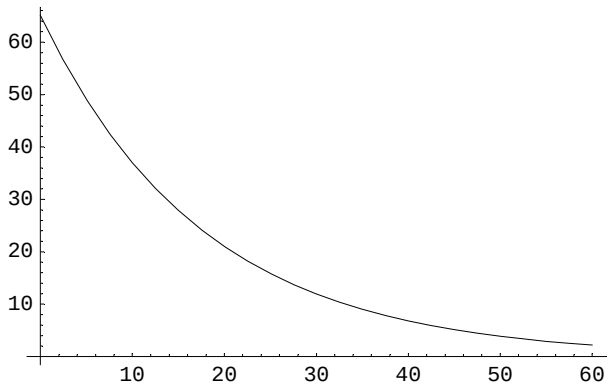
t=36

6.5=65,1*$e^{-0.0565373\, t}$

t=40.75

Es handelt sich um Betrug, da der Wein zwischen 36 und 40,75 Jahre alt ist.

```
Plot[65.1*Exp[-0.0565373*x], {x, 0, 60}]
```



- Graphics -

3. Begrenztes exponentielles Wachstum bzw. Abnahme

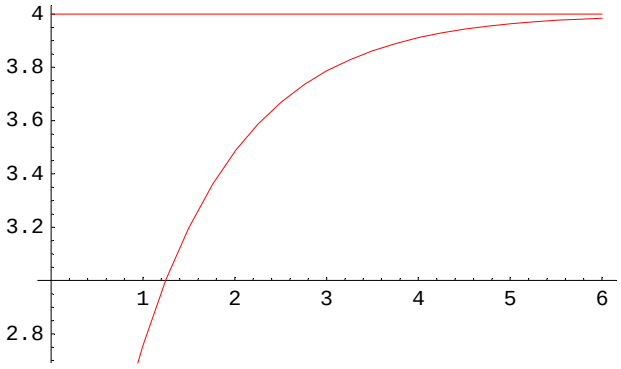
Das begrenzte Wachstum erfolgt proportional zu einem Restbestand (dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand und wird auch „Sättigungsmanko“ genannt). Hier kann ein bestimmter Bestand nicht überschritten werden und es gibt eine Grenze (der Graph kann nicht weiter steigen). Die Änderungsrate sinkt je weiter wir uns der Grenze nähern. Dieses Wachstum braucht man zum Beispiel, um den Verlauf bei Erwärmungsvorgängen nachzuvollziehen, da man eine bestimmte Temperatur nicht überschreiten kann.

■ Rechnen mit begrenztem Wachstum:

Anders als beim linearen und exponentiellen Wachstum braucht man nicht nur einen Anfangsbestand und einen Faktor, sondern auch eine Grenze. Diese kann man beliebig wählen. Um den Zuwachs zu ermitteln, bildet man zuerst die Differenz zwischen der Grenze und dem vorhandenem Bestand B alt und multipliziert dann mit dem Faktor. B neu ist die Summe aus B alt und dem Zuwachs.

Zuwachs = Faktor * (Grenze – B alt)

B neu = B alt + Zuwachs



- Graphics -

■ Erstellen der Formel des begrenzenten Wachstums:

Wie schon oben erklärt ist die Wachstumsgeschwindigkeit direkt proportional zum Sättigungsmanko (Differenz zwischen dem momentan Bestand und der Grenze).

Es gilt also dann:

$f'(t) = k * (G - f(t))$

Lösung dieser Differentialgleichung: $f(t) = G - e^{-k t} * (G - f(0))$

Beweis:

$f(t) = G - e^{-k t} * (G - f(0))$

$f'(t) = -e^{-k t} * (-k) * (G - f(0)) = k * e^{-k t} * (G - f(0)) = k * (G - G + e^{-k t} * (G - f(0))) = k * (G - (G - e^{-k t} * (G - f(0)))) = k * (G - f(t))$

■ Beispiel:

In der Psychologie werden Lernprozesse untersucht. Das Erlernen von Vokabeln kann näherungsweise durch begrenztes Wachstum beschrieben werden. Angenommen man muss 100 Vokabeln lernen und kann zu Beginn noch keines. Man erlernt 8 Vokabeln in 5 Minuten. Nach welcher Zeit kann man 60 Vokabeln? Wieviele Vokabeln erlernt man in 40 Minuten.

G=100

f(5)=100-e^{-k*5} $*(100-0)$=8 k=0,0166763

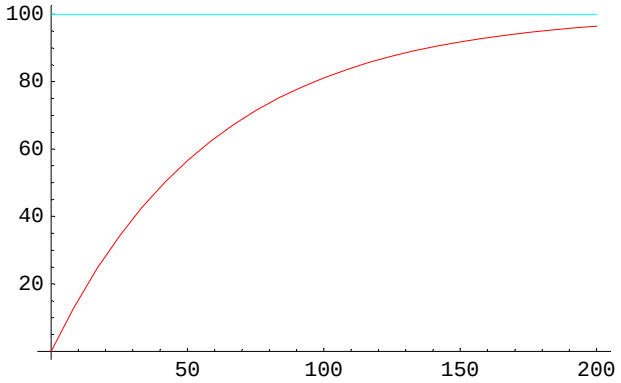
daraus ergibt sich die Formel f(t)=100-100*$e^{-0,0166763*t}$

60=100-100*$e^{-0,0166763*t}$

t=54,9457~55 min

f(40)=100-100*$e^{-0,0166763*40}$=48.6781~49 Vokabeln

```
Plot[{100 - 100 * Exp[-0.0166763 * x], 100}, {x, 0, 200}, PlotStyle -> {Hue[1], Hue[0.5]}]
```



- Graphics -

4. Logistisches Wachstum

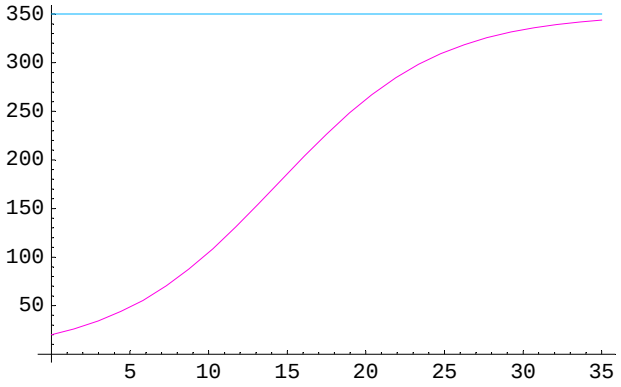
Das logistische Wachstum erfolgt proportional zu einem Restbestand (dies ist die Differenz zwischen einem Zielwert (Grenze) und dem vorhandenem Bestand: „Sättigungsmanko“) und proportional zum Ist-Bestand (B alt), d.h. zuerst hat man näherungsweise ein exponentielles Wachstum , dann aber verlangsamt sich das Wachstum und kommt langsam zum Erliegen. Die meisten Wachstumsvorgänge in der Natur verlaufen so, da zwar erst der Artenbestand wie beim exponentiellen Wachstum wächst, dann aber irgendwann nicht weiter wachsen kann, da es nicht genug Platz oder Futter gibt. Dieses Modell kommt der Realität also sehr nah, da es mehr Faktoren als das lineare, beschränkte oder exponentielle Wachstum berücksichtigt.

■ Rechnen mit logistischem Wachstum:

Um mit dem logistischen Wachstum rechnen zu können, braucht man einen Anfangsbestand, eine Zahl für den Faktor und die Grenze. Der (Anfangs-) Bestand (B alt) ändert sich nach jeder Rechnung. Um den neuen Bestand (B neu) zu errechnen, addiert man B alt mit dem Zuwachs. Da der Zuwachs sich aber bei jeder Rechnung ändert, muss man für ihn eine Formel aufstellen. Um den Zuwachs zu ermitteln, multipliziert man zuerst den Faktor mit dem vorhandenen Bestand (Anfangsbestand oder B alt). Dieses Produkt wird dann mit der Differenz von der Grenze und B alt multipliziert.

Zuwachs = Faktor * B alt * (Grenze - B alt)

B neu = B alt + Zuwachs



Out[1]= - Graphics -

■ Erstellen der Formel des logistischen Wachstums:

Wie bereits oben beschrieben ist der momentane Zuwachs direkt proportional sowohl zum momentanen Bestand als auch zum Sättigungsmanko.

Es gilt also : $f'(t) = k * f(t) * (G - f(t))$

Lösung dieser Differentialgleichung : $f(t) = \frac{G}{1 + b * e^{-G*k*t}}$

Beweis : $f'(t) = \frac{-G * b * e^{-G*k*t} * (-G * k)}{(1 + b * e^{-G*k*t})^2} = \frac{k * G * G * (b * e^{-G*k*t})}{(1 + b * e^{-G*k*t})^2} =$

$$\frac{k * G * G * (1 + b * e^{-G*k*t} - 1)}{(1 + b * e^{-G*k*t})^2} = \frac{k * G * (G * (1 + b * e^{-G*k*t}) - G)}{(1 + b * e^{-G*k*t})^2} =$$

$$\frac{k * G}{(1 + b * e^{-G*k*t})} * \frac{(G * (1 + b * e^{-G*k*t}) - G)}{(1 + b * e^{-G*k*t})} =$$

$$k * \frac{G}{(1 + b * e^{-G*k*t})} * \left(G - \frac{G}{(1 + b * e^{-G*k*t})}\right) = k * f(t) * (G - f(t))$$

■ Beispiel:

Oft fangen Biologen einige Tiere gefährdeter Arten und bringen sie in eine geschützte Umwelt um den Bestand zu erhalten. Angenommen sie fangen 6 Weißkopfadler und setzen sie in einem geschützten Gebiet aus. Auf Grund früherer Erfahrungen, erwarten die Biologen ein logistisches Wachstum mit einer maximal Bestand von 500 Artgenossen. Außerdem wird der Bestand nach 8 Jahren auf 21 Vögel angewachsen sein. Wie viele Vögel wird es voraussichtlich in 20 Jahren geben? Wann wird die Population auf 300 gestiegen sein?

w.w.:

G=500

f(0)=6= $\frac{500}{1+b*e^{-500*k*0}}$ b=82.3333

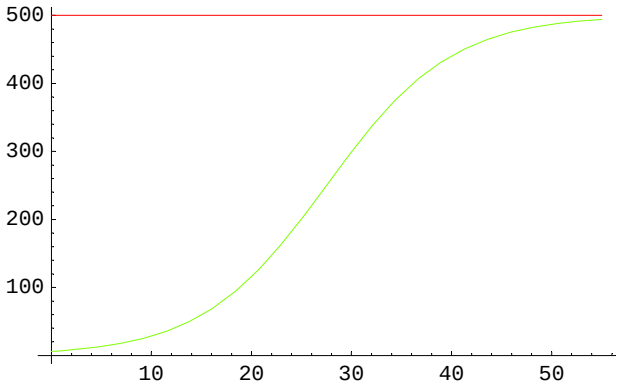
f(8)=21= $\frac{500}{1+82.3333*e^{-500*k*8}}$ k=0.000320899

f(t)= $\frac{500}{1+82.3333*e^{-0.16045*t}}$

f(20)= $\frac{500}{1+82.3333*e^{-0.16045*20}}$ =115.58~115 Vögel

300= $\frac{500}{1+82.3333*e^{-0.16045*t}}$ t=30.0171~ nach 30 J.

```
In[4]:= Plot[{500, 500 / (1 + 82.3333 * Exp[-0.16045 * t])},
          {t, 0, 55}, PlotStyle → {Hue[0], Hue[0.25]}]
```




```
Out[4]= - Graphics -
```

Zusammenfassung:

Wie bereits in der Einleitung vorausgenommen, haben wir 4 verschiedene Typen von Wachstumsvorgängen kennengelernt:

1. das lineare Wachstum (Zerfall):

charakteristische Eigenschaft: konstante Änderungsrate, immer gleicher Zuwachs
Formel: $f(x) = k\,x + d$ (oder: B neu= B alt + Konstante)
Beispiel: Abbau vom Alkohol im Blut

2. das exponentielle Wachstum (Zerfall):

charakteristische Eigenschaft: Zuwachs nicht konstant, sondern proportional zum Momentanbestand
Formel: $N(t) = N_0\, e^{-\lambda t}$ (oder: B neu= B alt+ B alt* Konstante)
Beispiel: Zerfall von radioaktiven Stoffen

3. das begrenzte Wachstum (Zerfall):

charakteristische Eigenschaft: proportional zum Sättigungsmanko (Differenz zwischen dem Momentanbestand und der Grenze), das Wachstum nähert sich einer Grenze an
Formel: $f(t) = G - e^{-k t} * (G - f(0))$ (oder: B neu= B alt+ Konstante*(Grenze- B alt))
Beispiel: Erwärmungsvorgänge

4. das logistische Wachstum (Zerfall):

charakteristische Eigenschaft: proportional zum Sättigungsmanko und proportional zum Momentanbestand
Formel: $f(t) = \frac{G}{1 + b * e^{-G k t}}$ (oder: B neu = B alt+Konstante* B alt * (Grenze- B alt))
Beispiel: Wachstum von Tieren in einem begrenzten Lebensraum

Anhang:

Verwendete Literatur:

1. Reichel H.C., Lehrburch der Mathematik 7, Wien[3] 1999.
2. Lernspirale Wachstumsprozesse (22.5.2004): http://.learn-line.nrw.de/angebote/selma/ foyer/projekte/dinslakenproj4/
3. Seite von Eberhard Endres, Lehrbeauftragter am Staatlichen Seminar für Didaktik und Lehrerbildung (Gymnasien) Heidelberg (20.5.2004) : http://www.seminar-heidelberg.de/Gymnasium/Mathe/simdyn3.html
4. Anwendungsorientirter Unterricht in der Sekundarstufe II, Klett Schulbuchverlag.